Algebra I Esercizi 5. Gruppi simmetrici, ordine, omomorfismi. Roma, 25 ottobre 2022.

1. Esprimere le seguenti permutazioni nel gruppo simmetrico S_9 come prodotti di cicli disgiunti. Calcolare gli inversi.

$$\text{(a)}\quad \sigma:\begin{cases} 1\mapsto 9, & 4\mapsto 1, \quad 7\mapsto 2,\\ 2\mapsto 7, & 5\mapsto 3, \quad 8\mapsto 5,\\ 3\mapsto 8, & 6\mapsto 4, \quad 9\mapsto 6.\end{cases} \qquad \text{(b)}\quad \tau:\begin{cases} 1\mapsto 8, & 4\mapsto 6, \quad 7\mapsto 9,\\ 2\mapsto 2, & 5\mapsto 5, \quad 8\mapsto 1,\\ 3\mapsto 3, & 6\mapsto 4, \quad 9\mapsto 7.\end{cases}$$

2. Scrivere la permutazione $(1\,9\,6\,4\,3\,8\,7)(1\,3\,7\,4\,8\,6\,2)(2\,7\,1)$ come prodotto di cicli disgiunti.

3. Siano σ, τ permutazioni nel gruppo simmetrico S_n.
   (a) Sia $a \in \{1, 2, \ldots, n\}$ e sia $b = \tau(a)$. Far vedere che la permutazione $\sigma\tau\sigma^{-1}$ manda $\sigma(a)$ in $\sigma(b)$.
   (b) Se $\tau = (a_1\, a_2\, \ldots\, a_k)$ è un k-ciclo, allora $\sigma\tau\sigma^{-1}$ è il ciclo $(\sigma(a_1)\,\sigma(a_2)\,\ldots\,\sigma(a_k))$.
   (c) Dimostrare che se τ è un prodotto di t cicli disgiunti di lunghezze $k_1, k_2, \ldots, k_t$, allora questo è vero anche per $\sigma\tau\sigma^{-1}$.

4. Siano $\sigma, \tau \in S_n$. Dimostrare che se la permutazione $\sigma\tau$ è un prodotto di t cicli disgiunti di lunghezze $k_1, k_2, \ldots, k_t$, allora questo è vero anche per $\tau\sigma$.

5. Determinare l'ordine di ogni elemento del gruppo diedrale D_4. Stessa domanda per il gruppo moltiplicativo $\mathbf{Z}_{16}^*$.

6. Sia G un gruppo finito di cardinalità n. Dimostrare che G è ciclico se e solo se esiste un elemento $g \in G$ di ordine n.

7. Sia G un gruppo e sia $x \in G$ un elemento di ordine n. Dimostrare che per ogni $y \in G$ anche l'elemento yxy^{-1} ha ordine n.

8. Dimostrare che le seguenti applicazioni sono omomorfismi ben definiti:
   (a) $\mathbf{R}^* \longrightarrow \mathbf{R}^*$ $\qquad x \mapsto |x|$,
   (b) $\mathbf{Z}_{10} \longrightarrow \mathbf{Z}_5$ $\qquad x \pmod{10} \mapsto x \pmod 5$,
   (c) $\mathbf{Z}_{10}^* \longrightarrow \mathbf{Z}_5^*$ $\qquad x \pmod{10} \mapsto x \pmod 5$,
   (d) $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}^*$ $\qquad x \mapsto \cos(x) + \mathrm{sen}(x)i$,
   (e) $\mathbf{C}^* \longrightarrow \mathbf{R}^*$ $\qquad a + bi \mapsto a^2 + b^2$,

   Quali sono iniettivi e quali suriettivi? Determinare i nuclei e le immagini.

9. Sia $f : G \longrightarrow H$ un'omomorfismo di gruppi. Sia $g \in G$ un elemento di ordine m. Dimostrare che l'ordine dell'elemento $f(g)$ di H divide m.

10. Sia G un gruppo e sia $g \in G$ e sia $H \subset G$ un sottogruppo. Dimostrare che anche $gHg^{-1} = \{gxg^{-1} : x \in H\}$ è un sottogruppo di G.

11. Sia G un gruppo. Dimostrare che l'applicazione $F : G \longrightarrow G$ data da $F(x) = x^2$ è un omomorfismo se e soltanto se G è abeliano. Dimostrare che l'applicazione $x \mapsto x^{-1}$ è un omomorfismo se e soltanto se G è abeliano.

12. Provare che il gruppo moltiplicativo $\mathbf{Z}_{12}^*$, il gruppo diedrale D_2 e il gruppo $P(X)$ sono tutti isomorfi. Qua $P(X)$ indica l'insieme delle parti di $X = \{0, 1\}$ con composizione la differenza simmetrica.