Algebra I Esercizi 4. Sottogruppi, commutatività, gruppo diedrale.Roma, 21 ottobre 2022.

1. Sia G un gruppo con elemento neutro e e siano a, b elementi di G.
   (a) Dimostrare che si ha che $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.
   (b) Dimostrare che $(ab)^{-1}$ è uguale a $a^{-1}b^{-1}$ se e solo $ab = ba$.

2. Sia G un gruppo con elemento neutro e.
   (a) Provare: se $x^2 = e$ per ogni $x \in G$, allora G è commutativo.
   (b) Provare: se $a^2b^2 = (ab)^2$ per ogni $a, b \in G$, allora G è commutativo.

3. Una trasformazione *affine* di $\mathbf{R}$ è una applicazione $A : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ data da

$$x \mapsto ax + b, \quad \text{per ogni } x \in \mathbf{R},$$

   per qualche $a \in \mathbf{R}^*$ e $b \in \mathbf{R}$. Dimostrare che le trasformazioni affini di $\mathbf{R}$ formano un gruppo con la composizione. Si tratta di un gruppo commutativo?

4. Determinare quali sottoinsiemi sono sottogruppi:
   (a) $\{x \in \mathbf{Q} : x > 0\} \subset \mathbf{Q}^*$,
   (b) $\{x \in \mathbf{R} : x > 1\} \subset \mathbf{R}^*$,
   (c) $\{\pm 1, \pm i\} \subset \mathbf{C}^*$,
   (d) il gruppo diedrale D_n del gruppo ortogonale $\mathrm{SO}_2(\mathbf{R})$ delle rotazioni intorno $(0, 0)$,
   (e) $\{x \in \mathbf{Q}^* : \text{ esiste } a \in \mathbf{Q} \text{ tale che } x = a^2\} \subset \mathbf{Q}^*$,
   (f) $\{x \in \mathbf{Q}^* : \text{ esistono } a, b \in \mathbf{Q} \text{ tali che } x = a^2 + b^2\} \subset \mathbf{Q}^*$.

5. Dimostrare che un sottogruppo di un gruppo abeliano è abeliano. Dare un esempio di un gruppo non abeliano con sottogruppo abeliano non banale (Sugg. un gruppo diedrale).

6. Per $n \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$ sia D_n il gruppo diedrale. Dimostrare che D_d è un sottogruppo di D_n se e solo se d divide n.

7. (a) Sia G un gruppo e sia I un insieme di indici. $\{H_i : i \in I\}$ una famiglia di sottogruppi di G. Dimostrare che

$$\cap_{i \in I} H_i = \{h : h \in H_i \quad \text{per ogni } i \in I\}$$

   è un sottogruppo di G.
   (b) Sia G un gruppo e siano $H \subset G$ e $H' \subset G$ due sottogruppi. Dimostrare: se $G = H \cup H'$ allora $G = H$ oppure $G = H'$.
   (c) Provare che il gruppo $G = \mathbf{Z}_{12}^*$ ha *tre* sottogruppi H_1, H_2 e H_3 diversi da G ma con $H_1 \cup H_2 \cup H_3 = G$.