1. Sia X un insieme e sia $Y = P(X)$. Dire se le seguenti relazioni di equivalenza sono riflessive, simmetriche o transitive:
   (a) la relazione R data da ARB se e solo se $A \subset B$ per $A, B \in Y$. (Si scrive ARB per $(A, B) \in R$).
   (b) la relazione R' data da $AR'B$ se e solo se $A \cup B \neq \emptyset$ per $A, B \in Y$.

2. Sia $X = \{1, 2, 3, 4\}$ e sia $Y = P(X)$. Sia R la relazione su Y data da ARB se e solo se $\#A = \#B$.
   (a) Verificare che R è una relazione di equivalenza.
   (b) Scrivere esplicitamente le classi di equivalenza. Quante sono?

3. Sia $A = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : xy \neq 0\}$ e sia R la relazione su A data da $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} R \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ se e solo se $xx' > 0$ e $yy' > 0$
   (a) Verificare che R è una relazione di equivalenza.
   (b) Quante classi di equivalenza ci sono?

4. Sia $a \in \mathbf{R}$ con $a > -1$. Dimostrare che vale $(1 + a)^n \geq 1 + na$, per ogni numero intero $n \geq 1$.

5. Per un intero $n \geq 1$, sia $q_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$. Dimostrare che per ogni intero $n \geq 1$ vale $q_n = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$.

6. Per i seguenti insiemi G e “composizioni” $*$, indicare, se esiste, un elemento neutro e dire quando si tratta di un gruppo:
   (a) $G = \mathbf{Z}_{>0}$ con $a * b = a^b$.
   (b) $G = \mathbf{R}$ con $a * b = a + b + 3$.
   (c) $G = \mathbf{R}_{>1}$ con $a * b = a^{\log(b)}$.
   (d) $G = \{-1, 0, 1\}$ con $a * b = a + b$.
   (e) $G = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ con $a*b = \max(a, b)$.
   (f) $G = \mathbf{R}^2$ con $\binom{a}{b} * \binom{c}{d} = \binom{c+ad}{bd}$.

7. (a) Sia G un gruppo e siano $a, b \in G$. Dimostrare che l’unica soluzione dell’equazione
   $$ax = b$$
   in G è data da $x = a^{-1}b$. Similmente, dimostrare che esiste un’unica soluzione $x \in G$ di
   $$xa = b,$$
   vale a dire $x = ba^{-1}$.
   (b) (Proprietà Sudoku) Provare che, nella tabella di composizione di un gruppo finito, ogni elemento compare esattamente una volta in ogni riga ed ogni colonna.

8. Sia X un insieme e sia $P(X)$ l’insieme delle parti di X. *La differenza simmetrica* $A \triangle B$ di due sottoinsiemi A e B di X è definita da
   $$A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B).$$
   Dimostrare che $P(X)$ con la composizione $\triangle$ è un gruppo abeliano. Scrivere la tabella di composizione per un insieme X di due elementi.