

1. (a) Dimostrare che se $n \geq 2$ non è primo, allora esiste un primo $p \leq \sqrt{n}$ che divide n .
(b) Sfruttare il risultato (a) per dimostrare che 467 è primo
2. Fattorizzare i seguenti numeri in fattori primi.
(a) 91; (c) $15^2 - 2^2$; (e) $2^{10} - 1$;
(b) 210; (d) $10!$; (f) $2^{11} - 1$;
3. Determinare il resto delle divisioni per 3, 9, 4, 11 del numero 3548917.
4. Siano $n, m \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$. Siano $\text{mcd}(n, m)$ e $\text{mcm}(n, m)$ il massimo comun divisore e il minimo comune multiplo fra n ed m . Dimostrare che $\text{mcm}(n, m) \cdot \text{mcd}(n, m) = nm$.
5. Calcolare $\text{mcd}(623, 413)$, $\text{mcd}(1014, 273)$ e $\text{mcd}(1122, 105)$.
6. Siano a e b interi con $\text{mcd}(a, b) = d$. Dimostrare che $\text{mcd}(a/d, b/d) = 1$.
7. Per i seguenti numeri n e m , determinare $a, b \in \mathbf{Z}$ tali che $an + bm = \text{mcd}(n, m)$.
(a) $n = 4$ e $m = 30$; (c) $n = 103$ e $m = 101$;
(b) $n = 14$ e $m = 40$; (d) $n = 91$ e $m = 0$.
8. (a) Scrivere il numero 123 in base 2 e in base 7;
(b) Scritto in base 2 sia $n = 10010001001$. Esprimere n in base 3;
(c) Scritto in base 16, siano $n = AB$ e $m = 9C$. Calcolare nm e scrivere il risultato in base 16.
9. Siano p e q due primi con la proprietà che non ci sono altri numeri primi fra p e q . Dimostrare che $p + q$ non è un prodotto di due numeri primi.
10. Sia $x = x_n x_{n-1} \dots x_0$ un numero intero positivo rappresentato in base 10. Far vedere che $x \equiv x_0 - x_1 + x_2 - \dots + (-1)^n x_n \pmod{11}$. Decidere se 123456789 è divisibile per 11.
11. (a) Per $k = 1, 2, 3, 4, 5$ determinare il resto della divisione per $p = 5$ di 2^k .
(b) Stessa domanda, ma per per $p = 7$.
(c) Per $p = 5$ e 7 determinare il resto della divisione di 5^{2022} per p .
12. Andare al sito https://www.transum.org/Maths/Investigation/Mind_Reader (anche raggiungibile dalla pagina web del corso). Spiegare come mai il “Mystical Mind Reader” riesce a sempre leggere la mente e indovinare il simbolo giusto.