1. Stabilire se il gruppo alternante A_4 è isomorfo o meno al gruppo diedrale D_6. Spiegare la risposta.

2. Dimostrare che ogni numero naturale n con $\mathrm{mcd}(n, 10) = 1$ divide un numero della forma $11111\ldots 11111$ (per esempio, 37 divide 111 e 41 divide 11111; sugg: prima dimostrare che n divide un numero della forma $9999\ldots 9999$).

3. Dimostrare che ogni numero della forma $x = 1+119k$ per qualche $k \in \mathbf{Z}$ ha la proprietà che $x^{17} \equiv 1 \pmod{2023}$.

4. Dimostrare che se p e primo e $p^2 + 8$ è primo, anche $p^3 + 4$ è primo.

5. Esibire un numero naturale con la proprietà che il gruppo simmetrico S_n contiene un elemento di ordine almeno n^2.

6. Sia G un gruppo finito con la proprietà che $\mathrm{Aut}(G)$ è banale.
   (a) Dimostrare che G è abeliano;
   (b) Dimostrare che ogni elemento di G ha ordine ≤ 2;
   (c) Dimostrare che $\#G = 1$ oppure 2.

7. Sia A un anello commutativo e siano $I \subset A$ e $J \subset A$ ideali. Supponiamo che l'omomorfismo naturale $A/IJ \longrightarrow A/I \times A/J$ sia suriettivo.
   (a) Dimostrare che esiste $x \in I$ con $x \equiv 1 \pmod{J}$.
   (b) Dimostrare che $I + J = A$.

8. Siano $a, b \in \mathbf{Z}_{>0}$ due interi coprimi.
   (a) Per $n \in \mathbf{Z}_{>0}$ dimostrare che anche a^n e b^n sono coprimi.
   (b) Supponiamo che $ab = c^m$ per qualche $c \in \mathbf{Z}$ ed esponente $m \geq 1$. Dimostrare che sia a che b sono m-esima potenza in $\mathbf{Z}$.

9. Sia R un anello comutativo e siano $I, J \subset R$ due ideali coprimi (questo vuol dire che $I + J = R$).
   (a) Dimostrare che per ogni $n \in \mathbf{Z}_{>0}$ gli ideali I^n e J^n sono anche coprimi.
   (b) Supponiamo che $IJ = K^m$ per un ideale K e un esponente $m \geq 1$. Dimostrare che sia I che J è m-esima potenza di qualche ideale di R.

10. Sia $\zeta = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3} \in \mathbf{C}$. Allora si ha che $\zeta^2 + \zeta + 1 = 0$. Sia $R = \{a + b\zeta : a, b \in \mathbf{Z}\}$.
    (a) Dimostrare che R è un anello Euclideo rispetto alla funzione $N : (R - \{0\}) \longrightarrow \mathbf{Z}_{\geq 1}$ data da $N(x) = x\overline{x}$.
    (b) Sia p un numero primo diverso da 3. Dimostrare che $p = x^2 + xy + y^2$ per certi $x, y \in \mathbf{Z}$ se e solo se $p \equiv 1 \pmod{3}$.

11. Sia $I \subset \mathbf{Z}[X]$ l'ideale generato dai polinomi $X^2 - 1$ e $X^2 + 1$. Quanti sono gli elementi invertibili dell'anello quoziente $\mathbf{Z}[X]/I$?

12. Sia $I \subset \mathbf{Z}[X, Y]$ l'ideale generato generato da $X^2 - Y$, $Y - 1$ e 3. Calcolare la cardinalità del gruppo degli elementi invertibili del anello quoziente $\mathbf{Z}[X, Y]/I$.