1. Dire se i seguenti sottoinsiemi sono ideali o meno:
   (a) $\mathbf{R}$ di $\mathbf{C}$;
   (b) $\{f \in \mathbf{Z}[X] : f(0) = 1\}$ di $\mathbf{Z}[X]$;
   (c) $\{a + bi \in \mathbf{Z}[i] : a$ e b hanno la stessa parità$\}$ di $\mathbf{Z}[i]$.
   (d) $\{\overline{a} \in \mathbf{Z}_{91} : \overline{a}$ è divisore dello zero$\}$ di $\mathbf{Z}_{91}$.

2. Siano A e B due anelli commutativi.
   (a) Dimostrare che $A \times \{0\}$ e $\{0\} \times B$ sono ideali dell'anello prodotto $A \times B$.
   (b) Calcolare somma, prodotto e intersezione degli ideali della parte (a).

3. Siano A e B due anelli commutativi.
   (a) Siano $I \subset A$ e $J \subset B$ ideali. Dimostrare che $I \times J$ è un ideale di $A \times B$.
   (b) Dimostrare che ogni ideale di $A \times B$ ha la forma $I \times J$ dove I è un ideale di A e J è un ideale di B.

4. Sia R un anello commutativo e siano $I, J \subset R$ due ideali di R. Dimostrare che $I \cup J$ è un ideale se e soltanto se $I \subset J$ oppure $J \subset I$.

5. Dimostrare che l'ideale $(2, X)$ dell'anello $\mathbf{Z}[X]$ non è principale.

6. Siano I, J ideali di un anello commutativo A.
   (a) Dimostrare che se $I + J = A$, allora $IJ = I \cap J$.
   (b) Dimostrare che si ha che $(I \cap J)(I + J) \subset IJ$.
   (c) Siano $A = \mathbf{Z}[X]$, $I = (2)$ e $J = (X)$. Dimostrare che $(I \cap J)(I + J) \neq IJ$.

7. Sia $\mathbf{H}$ il corpo dei quaternioni. Il *coniugio* $\overline{x}$ di un quaternione $x = a + bi + cj + dk$ (con $a, b, c, d \in \mathbf{R}$) è definito da $\overline{x} = a - bi - cj - dk$. Un quaternione x si dice *puro* se $a = 0$.
   (a) I quaternioni hanno una struttura naturale di spazio vettoriale reale di dimensione 4. Dimostrare che i quaternioni puri formano un sottospazio $\mathbf{H}_0$ di dimensione 3.
   (b) Dimostrare che i quaternioni puri x di norma $x\overline{x} = 1$ soddisfano $x^2 = -1$ e formano una sfera in $\mathbf{H}_0$.

8. In questo esercizio i calcoli vanno fatti nell'anello $\mathbf{Z}[X]$.
   (a) Determinare il resto della divisione di $f = 2X^3 - 3X + 2$ per $g = X^2 - 2X + 5$.
   (b) Dimostrare che non è possibile dividere $f = 2X^3 - 3X + 2$ per $h = 3X + 1$ con resto zero oppure di grado $< 1 = \deg(h)$.

9. Sia R l'anello $\mathbf{Z}[X]$, sia I l'ideale generato da $X^2 + 2$ e sia J l'ideale $(4, X)$.
   (a) Dimostrare che l'anello quoziente R/I è infinito.
   (b) Dimostrare che l'anello R/J ha quattro elementi.
   (c) Sia K l'ideale $I + J$. L'anello R/K, quanti elementi ha?

10. Sia A un dominio finito. Dimostrare che A è un campo.