

1. Sia R un anello e sia $a \in R$ un elemento invertibile. Siano $b, c \in R$. Dimostrare che se $ba = ca$, allora $b = c$. Dedurre che a ha un unico inverso moltiplicativo.
2. Siano A e B anelli. Dimostrare che $(A \times B)^* = A^* \times B^*$.
3. Sia $f : R \rightarrow R'$ un omomorfismo di anelli e sia $f^* : R^* \rightarrow R'$ la restrizione di f a R^* .
 - (a) Dimostrare che $f(R^*) \subset R'^*$ e che f^* è un omomorfismo di gruppi $R^* \rightarrow R'^*$.
 - (b) Dimostrare che f^* è iniettivo se f è iniettivo.
 - (c) È vero che f^* è suriettivo se f è suriettivo?
4. Sia R un anello. Dimostrare che esiste unico un omomorfismo di anelli $\mathbf{Z} \rightarrow R$. Dimostrare che esiste unico un omomorfismo di anelli $R \rightarrow \{0\}$. Qua $\{0\}$ indica l'anello zero.
5. (*Anello di Boole*) Sia X un insieme e sia $P(X)$ l'insieme dei sottoinsiemi di X . Definiamo per $A, B \in P(X)$

$$A + B = A \Delta B (= A \cup B - A \cap B),$$

$$A \cdot B = A \cap B.$$

Dimostrare che con quest'addizione e moltiplicazione $P(X)$ diventa un anello commutativo.

6.
 - (a) Sia $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ un omomorfismo di anelli. Dimostrare che f è l'identità.
 - (b) Sia $f : \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q}$ un omomorfismo di anelli. Dimostrare che f è l'identità.
 - (c) Sia $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ un omomorfismo di anelli. Dimostrare che $f(x) > 0$ se $x > 0$ e che per ogni $x, y \in \mathbf{R}$ si ha che $f(x) > f(y)$ se $x > y$.
 - (d) Sia $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ un omomorfismo di anelli. Far vedere che f è l'identità.
 - (e) Esibire un omomorfismo di anelli $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ che non è l'identità.
7. Sia \mathbf{H} il corpo dei quaternioni.
 - (a) Siano $x, y \in \mathbf{H}$ dati da $x = 1 + i + j - k$ e $y = -2 - j + k$. Calcolare $x + y$, $x\bar{y}$, $1/x$ e \bar{y}^2 .
 - (b) Dimostrare che $x \in \mathbf{H}$ ha la proprietà che $xy = yx$ per ogni $y \in \mathbf{H}$ se e solo se $x \in \mathbf{R}$.
8. Sia $m \in \mathbf{Z}_{>0}$. Supponiamo che m non sia un quadrato in \mathbf{Z} .
 - (a) Dimostrare: l'insieme

$$\mathbf{Z}[\sqrt{m}] = \{a + b\sqrt{m} : a, b \in \mathbf{Z}\}$$

è un sottoanello di \mathbf{R} .

- (b) Sia $m = 7$. Esibire un elemento invertibile $\varepsilon \neq \pm 1$ nell'anello $\mathbf{Z}[\sqrt{7}]$. (Sugg. Verificare che $a + b\sqrt{7}$ è invertibile se e soltanto se $(a + b\sqrt{7})(a - b\sqrt{7}) = a^2 - 7b^2$ è uguale a ± 1)
9. Dimostrare che per nessun anello il gruppo additivo è isomorfo al gruppo \mathbf{Q}/\mathbf{Z} . (Sugg: considerare l'uno dell'anello)