Algebra 1 (Schoof) 2^o esonero 25 gennaio 2023, ore 16:00–18:00.

COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Sia G un gruppo e sia $N \subset G$ un sottogruppo normale di cardinalità 2. Dimostrare che N è contenuto nel centro $Z(G)$ di G.
2. Siano A e B due anelli commutativi. Dimostrare che ogni ideale di $A \times B$ ha la forma $I \times J$ dove I è un ideale di A e J è un ideale di B.
3. Siano A e B anelli commutativi e sia $f : A \longrightarrow B$ un omomorfismo di anelli.
   (a) Sia $I \subset A$ un ideale. È sempre vero che $f(I)$ è un ideale di B?
   (b) Sia $J \subset B$ un ideale. È sempre vero che $f^{-1}(J)$ è un ideale di A?
   Spiegare le risposte.
4. Siano X, Y, Z numeri interi con la proprietà che $XY + YZ + ZX = 0$. Dimostrare che $X^2 + Y^2 + Z^2$ è un quadrato in $\mathbf{Z}$.
5. Sia A l'anello $\mathbf{Z}[X]/(X^2 - 1)$. Sia $i \in \mathbf{C}$ il numero complesso che soddisfa $i^2 = -1$.
   (a) Quanti omomorfismi di anelli $A \to \mathbf{Z}[i]$ ci sono?
   (b) Quanti omomorfismi di anelli $\mathbf{Z}[i] \to A$ ci sono?
6. Sia $I \subset \mathbf{Z}_2[X, Y]$ l'ideale generato da X e da Y^2.
   (a) Quanti elementi ha l'anello $\mathbf{Z}_2[X, Y]/I$?
   (b) Quanti elementi ha l'anello $\mathbf{Z}_2[X, Y]/I^2$?

Soluzioni.

1. Questo è l'esercizio 9 del foglio 8.
2. Questo è l'esercizio 3 del foglio 11.
3. (a) No, non sempre. Per esempio, sia $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Q}$ l'inclusione. Allora l'immagine $f(I)$ dell'ideale $I = \{2k : k \in \mathbf{Z}\}$ di $\mathbf{Z}$ non è un ideale di $\mathbf{Q}$. Invece (b) si.
4. Abbiamo che $(X + Y + Z)^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 + 2(XY + YZ + ZX)$. Se $XY + YZ + ZX = 0$, allora $X^2 + Y^2 + Z^2$ è uguale al quadrato $(X + Y + Z)^2$.
5. Ce ne sono due da A in $\mathbf{Z}[i]$: valutare in $+1$ e valutare in -1. Non ci sono nell'altra direzione, perché A non contiene un elemento di quadrato -1.
6. L'anello $\mathbf{Z}_2[X, Y]/I$ è isomorfo a $\mathbf{Z}_2[Y]/(Y^2)[X]/(X) \cong \mathbf{Z}_2[Y]/(Y^2)$. Ogni classe laterale dell'ideale $(Y^2) \subset \mathbf{Z}_2[Y]$ contiene un unico polinomio della forma $aY + b$, con $a, b \in \mathbf{Z}_2$. La cardinalità è quindi uguale a $2 \cdot 2 = 4$. Parte (b): si ha che $I^2 = (Y^4, Y^2X, X^2)$. Ogni sua classe laterale in $\mathbf{Z}_2[X, Y] = \mathbf{Z}_2[Y][X]$ contiene un unico polinomio della forma $aX + b$, dove $a, b \in \mathbf{Z}_2[Y]$ e soddisfano $\deg a < 2$ e $\deg b < 4$. L'anello $\mathbf{Z}_2[X, Y]/I^2$ ha quindi $2^{4+2} = 64$ elementi.