

COGNOME

NOME

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Stabilire se per le seguenti congruenze esistono soluzioni $x \in \mathbf{Z}$. In caso affermativo, determinarle tutte. (a) $5x \equiv 8 \pmod{17}$ (b) $9x \equiv 26 \pmod{30}$.
2. Sia $A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : xy \neq 0 \right\}$ e sia R la relazione su A data da $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} R \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ se e solo se $xx' > 0$ e $yy' > 0$
 - (a) Verificare che R è una relazione di equivalenza.
 - (b) Quante classi di equivalenza ci sono?
3. Esiste un elemento σ nel gruppo simmetrico S_5 di ordine maggiore di 5? Se esiste, esibirne uno. Se non esiste, spiegare perché no.
4. Sia $G = \mathbf{Z}_{32}^*$. Sia H il sottogruppo generato da $\overline{17}$.
 - (a) Determinare l'ordine dell'elemento $\overline{5}H$ di G/H .
 - (b) Stabilire se il gruppo quoziente G/H è ciclico o meno.
5. Sia $\phi : \mathbf{Z}_9 \rightarrow \mathbf{Z}_9^*$ l'applicazione data da $\phi(\overline{x}) = \overline{4}^x$ per $x \in \mathbf{Z}$.
 - (a) Dimostrare che ϕ è un omomorfismo ben definito.
 - (b) Determinare le cardinalità del nucleo e dell'immagine di ϕ .
6. Sia $S = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$ il gruppo circolare e sia $T \subset S$ il sottogruppo generato da -1 .
 - (a) Esibire un elemento di ordine 2 nel gruppo quoziente S/T .
 - (b) Dimostrare che S/T è isomorfo a S .

Soluzioni.

1. Questo è l'esercizio 4 del foglio 6.
2. Questo è l'esercizio 3 del foglio 3.
3. Esiste. Per esempio $(12)(345)$.
4. Si ha che $17^2 \equiv 1 \pmod{32}$. E quindi G/H ha $\varphi(32)/2 = 16/2 = 8$ elementi. Ogni elemento di G/H ha ordine una potenza di 2. L'elemento $\overline{5}^2 = \overline{25}$ non sta in H , ma $\overline{5}^4 = (-\overline{7})^2 = \overline{17}$ ci sta. L'ordine di $\overline{5}H$ è quindi 4. Gli elementi di G/H sono $\pm \overline{5}^k H$ per $k = 0, 1, 2, 3$. L'ordine di ciascuno di loro divide 4. Ne segue che G/H non è ciclico.
6. (a) Se $x, y \in \mathbf{Z}$ soddisfano $\overline{x} = \overline{y}$ in $\mathbf{Z}_9$, si ha che $x = y + 9k$ per qualche $k \in \mathbf{Z}$. Poiché $\overline{4}^9 = \overline{1}$ in $\mathbf{Z}_9$, si ha che $\overline{4}^x = \overline{4}^{y+9k} = \overline{4}^y =$ in $\mathbf{Z}_9^*$ e quindi ϕ è ben definito. Siccome $\phi(\overline{x} + \overline{x'}) = \phi(\overline{x})\phi(\overline{x'})$ per ogni $x, x' \in \mathbf{Z}_9$, la mappa ϕ è un omomorfismo. (b) Dal fatto che $4^3 \equiv 1 \pmod{9}$ segue che la cardinalità di $\ker(\phi)$ è 3. L'immagine è il sottogruppo di $\mathbf{Z}_9^*$ generato da $\overline{4}$ ed ha anche 3 elementi.
5. L'elemento iT ha ordine 2. La mappa $f : S/T \rightarrow S$ data da $f(z) = z^2$ è un omomorfismo ben definito. Poiché f è biiettivo, è un isomorfismo