

COGNOME

NOME

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Siano s_1 ed s_2 i due polinomi simmetrici elementari in $\mathbf{Z}[X, Y]$. Per $n \geq 1$ sia p_n il polinomio simmetrico $X^n + Y^n$. Dimostrare che, per $n \geq 2$, vale $p_{n+1} = s_1 p_n - s_2 p_{n-1}$.
2. Per σ, τ nel gruppo simmetrico S_4 diciamo che $\sigma \sim \tau$ se esiste $\rho \in S_4$ con $\sigma\rho = \rho\tau$.
 - (a) Dimostrare che “ $\sim$ ” è una relazione di equivalenza su S_4 .
 - (b) Quante classi di equivalenza ci sono?
3. Sia G un gruppo finito con la proprietà che $\text{Aut}(G)$ è banale.
 - (a) Dimostrare che G è abeliano;
 - (b) Dimostrare che ogni elemento di G ha ordine ≤ 2 .
4. Sia $I \subset \mathbf{R}[X, Y]$ l'ideale generato da $X^2 + Y^2 - 1$ e sia $J \subset \mathbf{R}[X, Y]$ l'ideale generato da $X + Y - 1$. Esibire, se esiste, un omomorfismo di anelli $f : \mathbf{R}[X, Y]/(I + J) \rightarrow \mathbf{R}$.
5. Sia D_n il gruppo diedrale, cioè il gruppo delle simmetrie del poligono regolare standard Π_n di n lati. Sia $f : D_n \rightarrow S_n$ l'applicazione che ad un elemento di D_n associa la permutazione indotta sugli n vertici di Π_n . Esibire generatori dell'immagine di f .
6. Un elemento x di un anello commutativo A si dice *nilpotente* se $x^n = 0$ per qualche esponente $n \geq 1$.
 - (a) Esibire gli elementi nilpotenti di $\mathbf{Z}_{100}$;
 - (b) Sia A un anello commutativo. Sia $u \in A$ invertibile e sia $x \in A$ nilpotente. Dimostrare che anche $u + x$ è invertibile.

Soluzioni.

1. Questo è l'esercizio 3 del foglio 14.
2. La parte (a) è una verifica facile. Due elementi σ e τ sono equivalenti se e se sono coniugati. Due permutazioni sono coniugati se e solo se sono prodotti di cicli disgiunti della stessa lunghezza. In S_4 ogni permutazione è coniugata ad una delle seguenti (1), (12), (123) e (1234) e (12)(34). Ci sono quindi 5 classi di equivalenza.
3. Questo è una parte dell'esercizio 6 del foglio 15.
4. L'omomorfismo f è indotto da un omomorfismo $\mathbf{R}[X, Y] \rightarrow \mathbf{R}$ che si annulla su I e su J . L'intersezione della retta $X + Y = 1$ con la circonferenza $X^2 + Y^2 = 1$ consiste nei punti (0, 1) e (1, 0). Ci sono quindi due omomorfismi: valutare polinomi di $\mathbf{R}[X, Y]$ in (0, 1) oppure in (1, 0).
5. Il gruppo D_n è generato dalla rotazione R di angolo $\frac{2\pi}{n}$ e dalla riflessione S rispetto all'asse delle ascisse. L'immagine in S_n è quindi generata dal n -ciclo $f(R) = (12 \dots n)$ e da $f(S)$. Se n è dispari, allora $f(S)$ è prodotto di $\frac{n-1}{2}$ trasposizioni. Se n è pari, $f(S)$ è prodotto di $\frac{n-2}{2}$ trasposizioni. Non scrivo le trasposizioni.
6. (a) Gli elementi nilpotenti sono i multipli di $\overline{10} \in \mathbf{Z}_{100}$. (b) Supponiamo che $x^n = 0$. Si ha che $u \equiv -x \pmod{u+x}$ e quindi

$$1 = u^{-n} u^n \equiv u^{-n} (-x)^n = 0 \pmod{u+x}.$$

In altre parole, $u + x$ divide 1 e quindi $u + x$ è invertibile.