

COGNOME

NOME

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Esibire una radice primitiva modulo 23.
2. Sia A_n il gruppo alternante. Dimostrare che il centro di A_n è banale per $n \geq 4$.
3. Sia R un anello commutativo e siano $I, J \subset R$ due ideali di R . Dimostrare che $I \cup J$ è un ideale se e soltanto se $I \subset J$ oppure $J \subset I$.
4. Sia G un gruppo, sia X un sottinsieme di G . Il *centralizzante* $\text{Cent}(X)$ consiste negli elementi di G che commutano con ogni elemento di X . Il *normalizzante* $\text{Norm}(X)$ di X consiste negli $g \in G$ che hanno la proprietà che $gxg^{-1} \in X$ per ogni $x \in X$. Dimostrare che $\text{Cent}(X)$ e $\text{Norm}(X)$ sono sottogruppi di G e che $\text{Cent}(X)$ è un sottogruppo normale di $\text{Norm}(X)$.
5. Sia G il gruppo additivo $\mathbf{Z}_6 \times \mathbf{Z}_6$ e sia $f : G \rightarrow \mathbf{Z}_6$ la proiezione sulla prima coordinata. Sia $H = \ker f$ e sia $c \in G/H$ la classe laterale che contiene $(\bar{4}, \bar{3})$. Determinare l'ordine di c nel gruppo G/H .
6. Sia A l'anello $\mathbf{Z}[X]/(X^2 + 4)$ e sia $J \subset A$ l'ideale generato da 2 e $\bar{X}$. Qua $\bar{X}$ indica la classe laterale di X .
 - (a) Quanti elementi ha l'anello quoziente A/J ?
 - (b) Quanti ne ha A/J^2 ?

Soluzioni.

1. Una radice primitiva modulo 23 è ad esempio 5.
2. Questo è una parte dell'esercizio 3 del foglio 9.
3. Questo è l'esercizio 4 del foglio 11.
4. Questo è l'esercizio 4 del compito del quarto appello.
5. Poiché $(\bar{4}, \bar{3}) \notin H$, ma $(\bar{4}, \bar{3}) + (\bar{4}, \bar{3}) + (\bar{4}, \bar{3}) = (\bar{0}, \bar{3})$ sta in H , l'ordine di c in G/H è 3.
6. (a) L'anello A/J è isomorfo a $\mathbf{Z}[X]/(2, X) \cong \mathbf{Z}_2$ ed ha due elementi. (b) Dal fatto che $\bar{X}^2 = -4$ in A , segue che l'ideale J^2 è generato da 4 e $2\bar{X}$. L'anello quoziente A/J^2 è quindi isomorfo a $\mathbf{Z}[X]/(X^2 - 4, 2X, 4) = \mathbf{Z}[X]/(X^2, 2X, 4)$ ed ha otto elementi. Infatti, ogni classe laterale di J^2 ammette un rappresentante unico della forma $aX + b$ con $a, b \in \mathbf{Z}$ con $0 \leq a \leq 1$ e $0 \leq b \leq 3$.