COGNOME

NOME

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Sia $F = 2^{32} + 1 = 4294967297$ il quinto numero di Fermat. Dimostrare che ogni divisore di F è congruo a 1 (mod 64).
2. Sia $f : \mathbf{Z}_{39}^* \rightarrow \mathbf{Z}_{39}^*$ l'applicazione data da $f(x) = x^6$ per $x \in \mathbf{Z}_{39}^*$.
 - (a) Dimostrare che f è un omomorfismo di gruppi e che $\text{im}(f) \subset \text{ker}(f)$.
 - (b) Quanti elementi ha il gruppo quoziente $\text{ker}(f)/\text{im}(f)$?
3. Sia $A = \{a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbf{Z}\}$ l'anello dei quaternioni con coefficienti interi. Il quaternionone $1 - j - k \in A$ è divisibile in A per $1 + i + j$? In altre parole, esiste un quaternionone $\alpha \in A$ tale che $\alpha(1 + i + j) = (1 - j - k)$?
4. Sia G un gruppo, sia X un sottinsieme di G . Il *centralizzante* $\text{Cent}(X)$ consiste negli elementi di G che commutano con ogni elemento di X . Il *normalizzante* $\text{Norm}(X)$ di X consiste negli $g \in G$ che hanno la proprietà che $gxg^{-1} \in X$ per ogni $x \in X$. Dimostrare che $\text{Cent}(X)$ e $\text{Norm}(X)$ sono sottogruppi di G e che $\text{Cent}(X)$ è un sottogruppo normale di $\text{Norm}(X)$.
5. Sia p un primo e sia $n \geq 1$. Sia A l'anello $\mathbf{Z}_p[X_1, X_2, \dots, X_n]$. Sia I l'ideale di A generato da $X_1, X_2, \dots, X_n$. Quanti elementi possiede l'anello quoziente A/I^2 ?
6. Sia p un numero primo. Esibire, se esiste, un omomorfismo di anelli
 - (a) $\mathbf{Z}_{p^2} \rightarrow \mathbf{Z}_p$;
 - (b) $\mathbf{Z}_p \rightarrow \mathbf{Z}_{p^2}$;
 - (c) $\mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_p \rightarrow \mathbf{Z}_p$;
 - (d) $\mathbf{Z}_p \rightarrow \mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_p$.

Soluzioni.

1. Questo è una parte dell'esercizio 8 del foglio 6.
2. Questo è l'esercizio 1 del foglio 9.
3. Se α esiste, allora è uguale a $(1 - j - k)(1 + i + j)^{-1} = \frac{1}{3}(1 - j - k)(1 - i - j) = -\frac{2i+j+2k}{3}$. Ma questo quaternionone non ha coefficienti interi e quindi α non esiste in A .
4. Va dimostrato che $\text{Cent}(X)$ e $\text{Norm}(X)$ sono chiusi rispetto alla composizione. Questo è una verifica senza sorprese. Per vedere che $\text{Cent}(H)$ è normale in $\text{Norm}(H)$, sia $h \in \text{Cent}(X)$ e sia $g \in \text{Norm}(X)$. Va dimostrato che ghg^{-1} sta in $\text{Cent}(X)$. Sia quindi $x \in X$. Dobbiamo dimostrare che $ghg^{-1}x = xghg^{-1}$, oppure equivalentemente, che $hg^{-1}xg = g^{-1}xgh$. Ma questo è chiaro, perché $g^{-1}xg$ appartiene ad X e h centralizza X .
5. Ogni classe laterale di I contiene un unico polinomio della forma $a_0 + a_1X_1 + \dots + a_nX_n$ con $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbf{Z}_p$. Ne segue che A ha p^{n+1} elementi.
6. (a) ridurre modulo p è un omomorfismo di anelli; (b) Non esiste. Supponiamo per assurdo che f esista. Allora l'immagine di f è un sottogruppo additivo di $\mathbf{Z}_{p^2}$ di ordine 1 oppure p . L'immagine non è zero, perché contiene $f(\bar{1})$, che è anche l'uno di $\mathbf{Z}_{p^2}$. Ma allora è uguale all'unico sottogruppo H di ordine p di $\mathbf{Z}_{p^2}$. Il sottogruppo H consiste nei multipli di p e non contiene l'uno di $\mathbf{Z}_{p^2}$. Contraddizione. (c) le proiezioni sono omomorfismi di anelli; (d) la mappa diagonale $x \mapsto (x, x)$ è un omomorfismo di anelli.