

COGNOME

NOME

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Siano $p, q > 2$ due numeri primi distinti. Quanti elementi ha l'insieme

$$\{\bar{x} \in \mathbf{Z}_{pq} : \bar{x}^2 = \bar{1}\}?$$

2. Quanti elementi ha l'anello $\mathbf{Z}[X, Y]/(X^2 + Y, Y - 2X, X - 3)$?
3. Sia G il gruppo $\mathbf{Z}_7^* \times \mathbf{Z}_7^*$ e sia H il sottogruppo $\{(\bar{x}, \bar{x}) : \bar{x} \in \mathbf{Z}_7^*\}$. Sia $C \in G/H$ la classe laterale che contiene $x = (\bar{3}, \bar{4})$. Determinare l'ordine di C nel gruppo G/H .
4. Per $k \geq 1$ scriviamo S_k per il gruppo simmetrico e A_k per il sottogruppo alterno. Siano $n, m \geq 1$ e sia $f : S_n \rightarrow S_m$ un omomorfismo. Dimostrare che $f(A_n) \subset A_m$.
5. Un elemento e di un anello si dice *idempotente* se $e^2 = e$.
 (a) Dimostrare che un campo possiede solo due elementi idempotenti.
 (b) Determinare gli elementi idempotenti dell'anello $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.
 (c) Quanti omomorfismi di anelli $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}$ ci sono?
6. Sia A un anello commutativo e siano $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \dots$ ideali di A . Sia I l'unione degli ideali I_k . Cioè, $I = \{a \in A : \text{esiste } k \geq 1 \text{ tale che } a \in I_k\}$.
 (a) Dimostrare che I è un ideale di A .
 (b) Dimostrare che se A è un PID (dominio ad ideali principali), allora $I = I_k$ per qualche $k \geq 1$.

Soluzioni.

- In $\mathbf{Z}_p$ e in $\mathbf{Z}_q$ l'equazione $X^2 = 1$ ha due soluzioni. Per il teorema cinese ce ne sono quindi quattro nell'anello $\mathbf{Z}_{pq}$.
- Si ha che $\mathbf{Z}[X, Y]/(X^2 + Y, Y - 2X, X - 3) \cong \mathbf{Z}[Y]/(9 + Y, Y - 6) \cong \mathbf{Z}_{15}$.
- Si ha che $x^2 = (\bar{2}, \bar{2}) \in H$. L'ordine di x è quindi 2.
- Questo è l'esercizio 5 del foglio 9.
- Questo è l'esercizio 2 del foglio 6.
- Se $x, y \in I$, allora $x \in I_k$ per qualche k e $y \in I_{k'}$ per qualche k' . Allora $x + y$ è in $I_{k''}$ dove k'' è il massimo di k e k' . Se $x \in I$ e $a \in A$, allora $x \in I_k$ per qualche k e quindi anche ax sta in I_k . Questo dimostra che I è un ideale. Per (b), sia $I = (a)$ per qualche $a \in A$. Allora $a \in I_k$ per qualche k e quindi $I \subset I_k$. Fatto.