COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Sia $H \subset \mathbf{Z}_{31}^*$ il sottogruppo generato da $\overline{2}$.
   (a) Quanti elementi ha H? Quanti elementi ha il gruppo quoziente $\mathbf{Z}_{31}^*/H$?
   (b) Determinare l'ordine dell'elemento $\overline{10}H$ di $\mathbf{Z}_{31}^*/H$.
2. Sia E il sottoinsieme del gruppo diedrale D_4 dato da $E = \{g \in D_4 : gS = Sg\}$. Qua S indica la simmetria rispetto all'asse delle ascisse. Quanti elementi ha E?
3. Sia $n \geq 1$. Dimostrare che ogni elemento del gruppo simmetrico S_n è coniugato al suo inverso, ossia che per ogni $\sigma \in S_n$ esiste $\tau \in S_n$ con $\sigma^{-1} = \tau\sigma\tau^{-1}$.
4. Un elemento x di un anello R si dice *nilpotente* se $x^n = 0$ per un $n \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$. Dimostrare che gli elementi nilpotenti di un anello commutativo R formano un ideale.
5. Sia $I \subset \mathbf{Z}[X]$ l'ideale $(2, X)$ e sia $J \subset \mathbf{Z}[X]$ l'ideale $(4, X)$.
   (a) Quanti elementi ha l'anello quoziente $\mathbf{Z}[X]/I$? Quanti elementi ha $\mathbf{Z}[X]/J$?
   (b) Determinare la cardinalità dell'anello $\mathbf{Z}[X]/IJ$.
6. La *traccia* di un quaternione $a + bi + cj + dk$ (con $a, b, c, d \in \mathbf{R}$) è per definizione uguale a $2a$. Determinare la traccia di $(i + j)(1 + i + k)^{-1}$.

Soluzioni.

1. Questo è l'esercizio 2 del foglio 6.
2. Il centro di D_4 è generato dalla rotazione R^2 di 180 gradi. L'insieme E è un sottogruppo che contiene S ed R^2, ma non è uguale a D_4. Il teorema di Lagrange implica quindi che $\#E = 4$.
3. Scriviamo $\sigma \in S_n$ come prodotto di cicli disgiunti $c_1, \ldots, c_k$. Allora la permutazione σ^{-1} è uguale al prodotto $c_1^{-1} \cdots c_k^{-1}$. Anche i cicli c_j^{-1} sono disgiunti e la lunghezza di ogni c_j^{-1} è uguale a quella di c_j. Questo implica che σ e σ^{-1} sono coniugati in S_n.
4. Questo è l'esercizio 9 del foglio 14.
5. L'anello $\mathbf{Z}[X]/I$ è isomorfo a $\mathbf{Z}_2$ ed ha 2 elementi. Similmente, $\mathbf{Z}[X]/J$ è isomorfo a $\mathbf{Z}_4$ ed ha 4 elementi. Per la parte (b) osserviamo che l'ideale IJ è uguale a $(X^2, 2X, 4X, 8) = (X^2, 2X, 8)$. Ogni classe laterale di IJ ammette quindi un rappresentante della forma $aX + b$ dove $a, b \in \mathbf{Z}$ con $0 \leq a < 2$ e $0 \leq b < 8$. Tale rappresentante è unico, perché se $aX + b$ e $a'X + b'$, dove sempre $a', b' \in \mathbf{Z}$ con $0 \leq a' < 2$ e $0 \leq b' < 8$, rappresentano la stessa classe, allora $(a - a')X + (b - b')$ sta in IJ. In altre parole, si ha che
$$(a - a')X + (b - b') = X^2 f(X) + 2Xg(X) + 8h(X)$$
per certi polinomi $f, g, h \in \mathbf{Z}[X]$. Valutare in 0 è un omomorfismo di anelli e implica che $b \equiv b' \pmod 8$ e quindi $b = b'$. Similmente, il coefficiente di X nella espressione sinistra è pari. Ne segue che $a \equiv a' \pmod 2$ e quindi $a = a'$. L'anello ha quindi $2 \cdot 8 = 16$ elementi.
6. Si ha che $x = (i + j)(1 + i + k)^{-1} = \frac{1}{3}(i + j)(1 - i - k) = \frac{1}{3}(i + j + 1 - k + j - i)$. La traccia di x è quindi uguale a $\frac{2}{3}$.