

COGNOME

NOME

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Sia $n \geq 1$ in $\mathbf{Z}$. Dimostrare che ogni divisore primo $p > 2$ di $n^4 + 1$ soddisfa $p \equiv 1 \pmod{8}$.
2. Sia G un gruppo commutativo. Sia H il sottoinsieme di G degli elementi di ordine finito.
 - (a) Dimostrare che H è un sottogruppo di G .
 - (b) Dimostrare che l'unico elemento del gruppo quoziente G/H di ordine finito è il suo elemento neutro.
3. Dimostrare che il gruppo simmetrico S_n è isomorfo al gruppo diedrale D_n se e solo se $n = 3$.
4. Sia A un dominio finito. Dimostrare che A è un campo.
5. Sia $A = \mathbf{Z}[\sqrt{-6}]$ il sottoanello di $\mathbf{C}$ dato da $\{a + b\sqrt{-6} : a, b \in \mathbf{Z}\}$ e sia I l'ideale di A generato da 3 e $\sqrt{-6}$.
 - (a) È principale l'ideale I ?
 - (b) È principale l'ideale I^2 ?
6. Quanti omomorfismi di anello $\mathbf{Z}_2[X] \longrightarrow \mathbf{Z}_6$ ci sono? Quanti omomorfismi di anello $\mathbf{Z}_6 \longrightarrow \mathbf{Z}_2[X]$ ci sono?

Soluzioni.

1. Questo è l'esercizio 9 del foglio 9.
2. La parte (a) è standard. Per (b), sia $g \in G$ un rappresentante della classe laterale $\bar{g} = gH$. Se $\bar{g}$ ha ordine finito, esiste un intero $m > 0$ con $\bar{g}^m$ uguale all'elemento neutro di G/H . Questo vuol dire che $g^m \in H$ e quindi esiste un intero $n > 0$ con $g^{nm} = e$, l'elemento neutro di G . Ma allora g ha ordine finito e sta in H . In altre parole, $\bar{g}$ è l'elemento neutro di G/H .
3. I gruppi S_n e D_n hanno la stessa cardinalità se e solo se $n! = 2n$ se e solo se $n = 3$. Il gruppo D_3 preserva il triangolo regolare. Ogni $\sigma \in D_3$ induce una permutazione dei tre vertici. Questo ci dà un omomorfismo $D_3 \rightarrow S_3$ iniettivo e quindi biiettivo.
4. Questo è l'esercizio 10 del foglio 11.
5. (a) L'ideale I non è principale. Infatti se $x = a + b\sqrt{-6} \in A$ fosse un generatore, la norma di x dividerebbe la norma di 3 e di $\sqrt{-6}$. Questo vuol dire che $a^2 + 6b^2$ divide 9 e 6 e quindi anche 3. L'equazione $a^2 + 6b^2 = 3$ non ha soluzioni $a, b \in \mathbf{Z}$. Abbiamo quindi che $a^2 + 6b^2 = 1$. Di conseguenza $b = 0$ e $a = \pm 1$, da cui segue che $1 \in I$. Questo è assurdo, perché la norma di ogni elemento in I è divisibile per 3. Alternativamente, l'anello $\mathbf{Z}[\sqrt{-6}]/I \cong \mathbf{Z}[X]/(X^2 + 6, 3, X) \cong \mathbf{Z}_3$ non è l'anello zero. Invece l'ideale I^2 è principale. Questo perché $I^2 = (9, 3\sqrt{-6}, -6)$, che è generato da 3.
6. Sia $a \in \mathbf{Z}$. Scriviamo $\bar{a}$ per la classe di a modulo 6 e $\tilde{a}$ per la classe modulo 2. Non ci sono omomorfismi $\phi : \mathbf{Z}_2[X] \longrightarrow \mathbf{Z}_6$: si ha necessariamente che $\phi(\tilde{0}) = \bar{0}$ e $\phi(\tilde{1}) = \bar{1}$. Ma questo implica che $\bar{0} = \phi(\tilde{0}) = \phi(\tilde{1} + \tilde{1}) = \bar{1} + \bar{1} = \bar{2}$ in $\mathbf{Z}_6$. Assurdo. Invece l'unico omomorfismo $\psi : \mathbf{Z}_6 \longrightarrow \mathbf{Z}_2[X]$ è dato da $\psi(\bar{a}) = \tilde{a}$. È ben definito, perché se $a \equiv b \pmod{6}$ anche $a \equiv b \pmod{2}$.