

1. Sia  $F = \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{-6})$ .
  - (a) Calcolare il grado di  $F$  su  $\mathbf{Q}$ .
  - (b) Determinare una base di  $F$  come  $\mathbf{Q}$ -spazio vettoriale.
  - (c) Determinare un elemento  $\alpha \in F$  tale che  $F = \mathbf{Q}(\alpha)$ .
  - (d) Dimostrare che  $\sqrt{-3} \in F$ .
  - (e) Determinare il discriminante  $\Delta(1, \sqrt{2}, \sqrt{-3}, \sqrt{-6})$ .
  - (f) Determinare il discriminante  $\Delta(1, \sqrt{2}, \sqrt{-3}, \sqrt{2} + \sqrt{-3})$ .
2. Sia  $F$  un campo di numeri e sia  $\phi : F \rightarrow \mathbf{C}$  un'omomorfismo di campi. Dimostrare che  $\phi(q) = q$  per ogni  $q \in \mathbf{Q}$ .
3. Sia  $F$  un campo di numeri di grado  $n$ .
  - (a) Sia  $x \in F$ . Dimostrare che per ogni  $q \in \mathbf{Q}$  si ha che

$$\text{Tr}(qx) = q\text{Tr}(x), \quad \text{Tr}(q) = nq, \quad N(q) = q^n.$$

- (b) Dimostrare che l'omomorfismo  $\text{Tr} : F \rightarrow \mathbf{Q}$  è suriettivo. Dimostrare che, in generale, la norma  $N : F^* \rightarrow \mathbf{Q}^*$  non è suriettiva.
4. Sia  $F$  il campo di numeri  $\mathbf{Q}(\sqrt[6]{5})$ . Quanti omomorfismi  $F \rightarrow \mathbf{R}$  ci sono? Quanti omomorfismi  $F \rightarrow \mathbf{C}$ ? Quanti ci sono a meno di coniugio?
5. Sia  $F$  un campo di numeri di grado  $n$ , sia  $a \in F$  e sia  $f \in \mathbf{Q}[X]$  il polinomio caratteristico di  $a$ . Dimostrare che per ogni  $q \in \mathbf{Q}$ , la norma di  $q - a$  è uguale a  $f(q)$ . Dimostrare che per ogni  $q, r \in \mathbf{Q}^*$ , la norma di  $q - ra$  è data da  $r^n f = (q/r)$ .
6. Sia  $F$  un campo di numeri.
  - (a) Dimostrare che il campo delle frazioni dell'anello degli interi  $O_F$  è uguale a  $F$ .
  - (b) Dimostrare che  $O_F \mathbf{Q} = \{xq : x \in O_F \text{ e } q \in \mathbf{Q}\}$ .
  - (b) Sia  $F \subset K$  un'estensione di campi di grado finito. Dimostrare che  $O_K \cap F = O_F$ .
7. (VanderMonde) Sia  $R$  un anello commutativo con 1 e siano  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in R$ . Dimostrare l'uguaglianza

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i).$$

8. Sia  $f(X) = X^4 - X - 1$ .
  - (a) Dimostrare che  $f$  è irriducibile in  $\mathbf{Q}[X]$ .  
Sia  $F = \mathbf{Q}[X]/(f(X))$ . Scriviamo  $F = \mathbf{Q}(\alpha)$  dove  $\alpha$  è uno zero di  $f$ .
  - (b) Calcolare il discriminante  $\Delta(1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3)$ .
  - (c) Dimostrare che l'anello degli interi di  $F$  è  $\mathbf{Z}[\alpha]$ .