1. Sia A un anello commutativo e sia $I \subset A$ un ideale. Dimostrare che se $I \neq A$, allora esiste un ideale massimale $\mathfrak{m}$ tale che $I \subset \mathfrak{m} \subset A$.

2. Dimostrare che $\pi^6 + \sqrt{2}\pi^2 + \sqrt{7}$ è trascendente su $\mathbf{Q}$.

3. Determinare il grado del campo di spezzamento dei seguenti polinomi su $\mathbf{Q}$:
   (a) $X^3 - 1$;
   (b) $X^3 - 3$;
   (c) $X^4 - 2$;
   (d) $X^{10} - 1$;
   (e) $X^2 - 841$;
   (f) $X^3 - X^2 - 2X + 1$, (Sugg. $\alpha = 2\cos(\pi/7)$ è uno zero del polinomio.)

4. Determinare il grado di un campo di spezzamento del polinomio $X^4 - 2$ sui campi
   (a) $\mathbf{C}$,
   (b) $\mathbf{R}$,
   (c) $\mathbf{Q}$,
   (d) $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$,
   (e) $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})$,
   (f) $\mathbf{Q}(\sqrt[4]{2})$.
   (g) $\mathbf{Z}_2$,
   (h) $\mathbf{Z}_3$,
   (i) $\mathbf{Z}_5$.

5. Sia p un primo e sia k un campo di caratteristica p. Sia $a \in k$ e sia f il polinomio "di Artin-Schreier" $f = X^p - X - a \in k[X]$. Sia K un campo si di spezzamento di f su k e sia $\alpha \in K$ uno zero di f. Dimostrare che:
   (a) per ogni $\lambda \in \mathbf{Z}_p$ si ha che $\alpha + \lambda$ è uno zero di f.
   (b) f è irriducibile in $k[X]$ oppure f è un prodotto di p fattori lineari in $k[X]$. In entrambi i casi determinare $[K : k]$. (Sugg. Per un fattore irriducibile g di f considerare il *sottogruppo* $H = \{\lambda \in \mathbf{Z}_p : g(X + \lambda) = g(X)\}$ di $\mathbf{Z}_p$).

6. Sia F un campo, sia $F \subset K$ un'estensione algebrica e sia $F \subset L$ un'estensione algebricamente chiusa. Sia

$$\Omega = \{(E, \phi) : E \text{ è campo per cui } F \subset E \subset K \text{ e } \phi : E \to L \text{ è un omomorfismo}\}$$

   (a) Per (E, ϕ) e (E', ϕ') in Ω definiamo che $(E, \phi) \leq (E', \phi')$ se $E \subset E'$ e la restrizione di ϕ' ad E è uguale a ϕ. Dimostrare che si tratta di un ordinamento parziale.
   (b) Dimostrare che $\Omega \neq \emptyset$ e che ogni catena ha un maggiorante in Ω.
   (c) Per il lemma di Zorn esiste un elemento massimale in Ω. Dimostrare che si tratta di (K, ψ) per qualche omomorfismo $\psi : K \to L$.

7. Sia F un campo. Dimostrare che una chiusura algebrica di F è unica a meno di isomorfismi. (Sugg. Applicare l'esercizio precedente).