1. Sia A un PID e sia $a \in A$ un elemento non nullo. Dimostrare che l'anello $A/(a)$ possiede solo un numero finito di ideali.

2. Sia $H \subset \mathbf{Z}^2$ il sottogruppo $\{(x, y) \in \mathbf{Z}^2 : 2x + 3y = 0\}$. Esibire elementi v_1, v_2 di $\mathbf{Z}^2$ e $a \in \mathbf{Z}$ tali che $\mathbf{Z}^2 = \mathbf{Z}v_1 + \mathbf{Z}v_2$ e $H = \mathbf{Z}av_1$.

3. Sia $H \subset \mathbf{Z}^3$ il sottogruppo $\{(x, y) \in \mathbf{Z}^2 : 2x + 3y + 4z = 0\}$. Esibire elementi v_1, v_2, v_3 di $\mathbf{Z}^3$ e $a_1, a_2 \in \mathbf{Z}$ tali che $\mathbf{Z}^3 = \mathbf{Z}v_1 + \mathbf{Z}v_2 + \mathbf{Z}v_3$ e $H = \mathbf{Z}a_1v_1 + \mathbf{Z}a_2v_2$.

4. Dimostrare che non esiste uno $\mathbf{Z}[i]$-modulo di cardinalità 3.

5. Sappiamo che, a meno di isomorfismi, ci sono due $\mathbf{Z}$-moduli (= gruppi abeliani) di cardinalità 4, vale a dire $\mathbf{Z}_4$ e $V_4 = \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$. A meno di isomorfismi, quanti $\mathbf{Z}[i]$-moduli di cardinalità 4 ci sono? A meno di isomorfismi, quanti $\mathbf{Z}_2[X]$-moduli di cardinalità 4 ci sono?

6. Sia k un campo. I seguenti $k[X]$-moduli M hanno k-dimensione finita. La moltiplicazione per X è un'applicazione k-lineare $M \to M$. Calcolarne il polinomio caratteristico quando:
   (a) $M = k[X]/(X^4)$;
   (b) $M = k[X]/(X^2) \times k[X]/(X^2)$;
   (c) $M = k[X]/(X) \times k[X]/(X + 1) \times k[X]/(X + 2) \times k[X]/(X + 3)$.

7. (a) Fattorizzare il polinomio $X^4 + 4$ in $\mathbf{Z}[X]$.
   Sia $n > 1$ un numero intero.
   (b) Dimostrare che $n^4 + 4$ non è primo.
   (c) Dimostrare che $n^4 + 4^n$ non è primo.

8. Siano A e B anelli commutativi e sia $f : A \longrightarrow B$ un omomorfismo di anelli.
   (a) Dimostrare: se I è un ideale di B allora $f^{-1}(I)$ è un ideale di A. È vero che $f(J)$ è un ideale di B se J è un ideale di A?
   (b) Dimostrare: se $\mathfrak{p}$ è un ideale primo di B allora $f^{-1}(\mathfrak{p})$ è un ideale primo di A.
   (c) Se $\mathfrak{m}$ è un ideale massimale di B allora $f^{-1}(\mathfrak{m})$ non è necessariamente un ideale massimale di A. Dare un controesempio.

9. Sia A un anello commutativo e sia $\mathrm{Spec}(A)$ l'insieme degli ideali primi di A. Per ogni ideale I di A sia $Z(I) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) : I \subset \mathfrak{p}\}$.
   (a) Dimostrare che $Z(A) = \emptyset$ e $Z(\{0\}) = \mathrm{Spec}(A)$.
   (b) Dimostrare che i sottoinsiemi $Z(I)$ di $\mathrm{Spec}(A)$ sono i chiusi di una topologia su $\mathrm{Spec}(A)$. Si tratta della *topologia di Zariski*.
   (c) Dimostrare che $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ è un punto chiuso se e solo se $\mathfrak{p}$ è un ideale massimale.
   (d) Sia $A = \mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$. Dimostrare che la topologia di Zariski non è di Hausdorff.

10. Siano A e B anelli commutativi e sia $f : A \longrightarrow B$ un omomorfismo di anelli. Dimostrare che l'applicazione $\phi : \mathrm{Spec}(B) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ data da $\phi(\mathfrak{p}) = f^{-1}(\mathfrak{p})$ è continua per la topologia di Zariski.