1. Sia $C(\mathbf{R})$ l'anello delle funzioni continue $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Chi è l'elemento 1 di quest'anello? Una funzione $f \in C(\mathbf{R})$ si dice *a supporto compatto* se esiste $M > 0$ tale che $f(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$ che soddisfa $|x| > M$. Dimostrare che le funzioni a supporto compatto formano un ideale di $C(\mathbf{R})$.

2. Decidere se il polinomio $X^5 + X^3 + 1$ è irriducibile o meno negli anelli $\mathbf{Z}_2[X]$, $\mathbf{Z}_3[X]$, $\mathbf{Z}[X]$, $\mathbf{Q}[X]$ e $\mathbf{R}[X]$.

3. Il polinomio *reciproco* di $f = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j \in \mathbf{Q}[X]$ (con a_0, a_n diversi da 0) è il polinomio $f^\vee = \sum_{j=0}^{n} a_{n-j} X^j \in \mathbf{Q}[X]$. Dimostare che f è irriducibile se e solo se $f^\vee$ è irriducibile.

4. Fattorizzare i seguenti elementi dell'anello R in fattori irriducibili di R.
   (a) $X^2 - Y^2$ con $R = \mathbf{Q}[X, Y]$;
   (b) $X^3 + 4X^2 + 9X + 6$ con $R = \mathbf{Q}[X]$;
   (c) $\frac{13}{7}X^2 - 91$ con $R = \mathbf{Q}[X]$;
   (d) 247 con $R = \mathbf{Z}$.

5. Sia R il sottoanello $\{a + b\sqrt{-6} : a, b \in \mathbf{Z}\}$ di $\mathbf{C}$.
   (a) Esibire un isomorfismo dall'anello $\mathbf{Z}[X]/(X^2 + 6)$ a R.
   (b) Dimostrare che l'ideale $(2, \sqrt{-6})$ di R non è principale.
   (c) Dimostrare che l'elemento 2 di R è irriducibile, ma non è primo. (Sugg. la norma $N : R \longrightarrow \mathbf{Z}$ data da $N(x) = x\overline{x}$ è moltiplicativa).

6. (Elementi irriducibili di $\mathbf{Z}[i]$)
   (a) Dimostrare che $\mathbf{Z}[i]^* = \{\pm 1, \pm i\}$.
   (b) Dimostrare che $i + 1$ è un elemento irriducibile di $\mathbf{Z}[i]$.
   (c) Sia $p \equiv 3 \pmod 4$ un numero primo. Dimostrare che p è un elemento irriducibile di $\mathbf{Z}[i]$.
   (d) Si sa che per ogni primo $p \equiv 1 \pmod 4$ esistono $a, b \in \mathbf{Z}$ tali che $p = a^2 + b^2$. Dimostrare che $\pi = a + bi$ e $\overline{\pi} = a - bi$ sono elementi irriducibili di $\mathbf{Z}[i]$.
   (e) Dimostrare che un elemento irriducibile di $\mathbf{Z}[i]$ necessariamente divide qualche numero primo. Dedurne che, a meno di elementi invertibili, gli elementi irriducibili di $\mathbf{Z}[i]$ sono quelli che appaiono nelle parti (b), (c) e (d).

7. Sia $\mathbf{Z}[i]$ l'anello degli interi di Gauss.
   (a) Fattorizzare gli elementi $5 + i$ e $239 + i$ come prodotto di elementi irriducibili di $\mathbf{Z}[i]$. (Sugg. prima fattorizzare le norme).
   (b) Dedurre la formula classica che John Machin ha usato nel 1706 per calcolare *a mano* i primi 100 decimali di π:

$$\pi = 16 \arctan\frac{1}{5} - 4 \arctan\frac{1}{239}, \qquad \text{con} \quad \arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

$$\left(\begin{array}{l} \pi = 3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164062 \\ \quad 862089986280348253421170 68\ldots \end{array} \right)$$