1. Sia n un numero naturale. Dimostrare che per ogni divisore $m > 0$ di n, ogni gruppo abeliano di cardinalità n ammette un sottogruppo di cardinalità m.

2. Sia G un gruppo abeliano finito. Sia $\#G = mn$ con $\mathrm{mcd}(n,m) = 1$.
   (a) Sia $A = \{x \in G : x^n = e\}$ e sia $B = \{x \in G : x^m = e\}$. Dimostrare che A e B sono sottogruppi di G e che la mappa $\phi : A \times B \to G$ data da $\phi(a,b) = ab$ è un isomorfismo di gruppi.
   (b) Dimostrare che G è prodotto diretto dei suoi sottogruppi di Sylow.

3. Siano H e N due gruppi e sia $\phi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ un omomorfismo. Dimostrare che $N' = \{(x,e) : x \in N\}$ è un sottogruppo normale del prodotto semidiretto $N \rtimes_\phi H$. Dimostrare che $N' \cong N$.

4. Sia ϕ l'unico omomorfismo suriettivo da $\mathbf{Z}_4$ ad $\mathrm{Aut}(\mathbf{Z}_3)$. Sia B il prodotto semidiretto $\mathbf{Z}_3 \rtimes_\phi \mathbf{Z}_4$ associato a ϕ.
   (a) Determinare gli elementi di ordine 2 di B.
   (b) Dimostrare che B non è isomorfo né al gruppo diedrale D_6 né al gruppo alternante A_4.

5. Sia G un gruppo di cardinalità 33.
   (a) Dimostrare che i sottogruppi di Sylow di G sono normali.
   (b) Dimostrare che $G \cong \mathbf{Z}_{33}$. (Sugg. usare l'esercizio 2.10)

6. Sia G un gruppo di cardinalità 45.
   (a) Dimostrare che i sottogruppi di Sylow di G sono normali.
   (b) Dimostrare che G è abeliano.

7. Sia G un gruppo finito, sia p un primo e sia $N \subset G$ un sottogruppo normale di cardinalità una potenza di p. Dimostrare che $N \subset P$ per ogni p-sottogruppo di Sylow P di G.

8. Sia $G = \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}_3)$. Quanti elementi ha G? Dimostrare che il 2-sottogruppo di Sylow è normale. Decidere se è isomorfo al gruppo diedrale D_4 oppure al gruppo dei quaternioni Q.

9. Siano H e N due gruppi e sia $\phi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ un omomorfismo. Sia $\sigma \in \mathrm{Aut}(H)$ e sia $\tau \in \mathrm{Aut}(N)$. Scriviamo c_τ per la mappa $\mathrm{Aut}(N) \to \mathrm{Aut}(N)$ data dal coniugio per τ. Sia $\psi = c_\tau \cdot \phi \cdot \sigma$. Dimostrare che i gruppi $N \rtimes_\phi H$ e $N \rtimes_\psi H$ sono isomorfi.

10. Il gruppo S_4 agisce linearmente su $\mathbf{R}^4$ permutando i vettori della base canonica $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Cioè, si ha che $\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$, per $i = 1,2,3,4$. Sia V il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ dato da $V = \{(v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbf{R}^4 : v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0\}$.
    (a) Dimostrare che S_4 preserva V.
    L'azione di S_4 ci dà quindi un'omomorfismo $\varrho : S_4 \longrightarrow \mathrm{GL}(V) \cong \mathrm{GL}_3(\mathbf{R})$.
    (b) Calcolare il polinomio caratteristico di $\varrho(\sigma)$, per $\sigma = (1\,2\,3)$ e $\sigma = (1\,2\,3\,4)$.