1. Sia G un gruppo. Dimostrare che un sottogruppo normale di G è unione disgiunta di classi di coniugio di G.
2. Sia H il sottogruppo del gruppo simmetrico S_4 generato da $(1\,2\,3)$. Determinare gli elementi del normalizzante di H.
3. Sia $n \geq 2$ e sia $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Il gruppo S_n agisce sull'insieme $X \times X$ via $\sigma(x, y) = (\sigma(x), \sigma(y))$ per $\sigma \in S_n$ e $x, y \in X$. Quanto orbite ci sono?
4. L'azione di un elemento $\sigma \in D_4$ sul quadrato regolare in $\mathbf{R}^2$ induce una permutazione dei quattro vertici. In questo modo otteniamo un omomorfismo $\phi : D_4 \to S_4$. Dimostrare che $\phi(D_4)$ è un 2-sottogruppo di Sylow di S_4. Scrivere esplicitamente gli otto elementi.
5. Sia G il gruppo moltiplicativo dato da
$$G = \{\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : x \in \mathbf{Z}_5 \text{ e } y \in \mathbf{Z}_5^*\}.$$
   (a) Verificare che $\#G = 20$.
   (b) Esibire un 5-sottogruppo di Sylow. Quanti 5-sottogruppi di Sylow ci sono?
   (c) Esibire un 2-sottogruppo di Sylow. Quanti 2-sottogruppi di Sylow ci sono?
6. Sia G il gruppo alternante A_6.
   (a) Quanti 5-sottogruppi di Sylow ci sono?
   (b) Dimostrare che ogni 3-Sottogruppo di Sylow è isomorfo a $\mathbf{Z}_3 \times \mathbf{Z}_3$. Quanti ne sono?
   (c) Esibire esplicitamente un 2-sottogruppo di Sylow. (ce ne sono 45)
7. Sia p un primo e sia P un p-sottogruppo di Sylow di un gruppo finito G. Dimostrare che ci sono esattamente $[G : N_G(P)]$ p-sottogruppi di Sylow in G. Qua $N_G(P)$ indica il normalizzante di P in G.
8. Sia p un numero primo.
   (a) Esibire un p-sottogruppo di Sylow di $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$.
   (b) Sia $n \geq 1$. Determinare la cardinalità del gruppo $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z}_p)$.
   (c) Sia $n \geq 1$. Esibire un p-sottogruppo di Sylow di $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z}_p)$.
9. (terzo teorema di isomorfismo) Sia G un gruppo e siano H e N sottogruppi di G. Supponiamo che N normalizzi H: per ogni $g \in N$ abbiamo che $gHg^{-1} \subset H$.
   (a) Dimostrare che $HN = \{xg : x \in H \text{ e } g \in N\}$ è un sottogruppo di G.
   (b) Dimostrare che H è sottogruppo normale di HN.
   (c) Dimostrare che l'omomorfismo composto $N \hookrightarrow HN \to HN/H$ è suriettivo e che il suo nucleo è $H \cap N$.
   (d) Concludere che la mappa indotta $N/(H \cap N) \to HN/N$ è un'isomorfismo.
10. Sia G un gruppo e siano N_1, N_2 due sottogruppi normali di G con la proprietà $N_1 \cap N_2 = \{e\}$.
    (a) Dimostrare che N_1 e N_2 commutano.
    (b) Dimostrare che il sottogruppo $N_1N_2 = \{xy : x \in N_1 \text{ e } y \in N_2\}$ è isomorfo a $N_1 \times N_2$.