

1. Determinare il polinomio minimo di $(1 + \sqrt{3})/\sqrt{2}$ su $\mathbf{Q}$.
2. Per quali numeri naturali n il polinomio $x^{n^4} + x^{n^3} + x^{n^2} + x^n + 1$ di $\mathbf{Q}[X]$ è divisibile per $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$?
3. Sia $f \in \mathbf{Z}[X]$ un polinomio monico.
 - (a) Se $\alpha \in \mathbf{Q}$ è uno zero di f , allora $\alpha \in \mathbf{Z}$.
 - (b) Supponiamo che $f(2) = 13$. Dimostrare che f ha al più tre zeri distinti in $\mathbf{Q}$.
 - (c) Esibire un polinomio f con tre zeri razionali distinti e che soddisfa $f(2) = 13$.
4. Sia p un primo. Dimostrare che gli anelli $\mathbf{Z}_p[X]$ e $\mathbf{Z}_p[X, Y]/(XY - 1)$ non sono isomorfi.
5. (*Teorema cinese del resto*) Sia R un anello commutativo e siano $I, J \subset R$ due ideali coprimi (cioè si ha che $I + J = R$)
 - (a) Dimostrare che $IJ = I \cap J$.
 - (b) Dimostrare che l'applicazione naturale $R/IJ \rightarrow R/I \times R/J$ è un isomorfismo di anelli.
6. Sia R un anello commutativo con 1. Un elemento $e \in R$ si dice *idempotente* se $e^2 = e$.
 - (a) Determinare gli elementi idempotenti di $\mathbf{Z}_6$ e di $\mathbf{Z}_{100}$.
 - (b) Dimostrare: se $e \in R$ è idempotente anche $1 - e$ lo è.
 - (c) Sia $e \in R$ idempotente; dimostrare che la mappa naturale $R \rightarrow R/(e) \times R/(1-e)$ è un isomorfismo di anelli.
7. Sia R un anello commutativo e siano $I, J \subset R$ due ideali coprimi, vale a dire $I + J = R$. Dimostrare che per ogni $m \geq 1$ si ha che $I^m + J^m = R$.
8. (*Funzione ϕ di Euler per $\mathbf{Z}_p[X]$*). Sia p un primo. Per $f \in \mathbf{F}_p[X]$ definiamo $N(f) = \# \mathbf{F}_p[X]/(f)$ e $\phi(f) = \#(\mathbf{F}_p[X]/(f))^*$.
 - (a) Siano $f, g \in \mathbf{F}_p[X]$. Dimostrare che $N(fg) = N(f)N(g)$. Se $\text{mcd}(f, g) = 1$ dimostrare che $\phi(fg) = \phi(f)\phi(g)$.
 - (b) Sia $f \in \mathbf{F}_p[X]$ irriducibile. Dimostrare che $\phi(f) = N(f) - 1$. Per $k \geq 1$ dimostrare che $\phi(f^k) = (N(f) - 1)N(f)^{k-1}$.
 - (c) Sia $f \in \mathbf{F}_p[X]$. Dimostrare che

$$\phi(f) = N(f) \prod_{\substack{g|f \\ g \text{ irr}}} \left(1 - \frac{1}{N(g)}\right).$$

- (d) Determinare $\#(\mathbf{F}_p[X]/(X^3 - 1))^*$ per $p = 2, 3, 5$ e 7 rispettivamente.
9. (a) Per ogni $n \leq 10$ diverso da 5 esibire un anello A con $\#A^* = n$.
 (b) Dimostrare che non esiste un anello A con $\#A^* = 5$.