

1. Dimostrare che ogni gruppo di cardinalità 2021 è ciclico.
2. Siano p e q due numeri primi. Dimostrare che ogni gruppo G di ordine pq ammette un sottogruppo normale diverso da G e da $\{1\}$.
3. Sia $n \in \mathbf{Z}$ positivo. Dimostrare che se n e $n^2 + 2$ sono primi, anche $n^3 + 4$ è primo.
4. Sia G un gruppo. Un sottogruppo H di G si dice *caratteristico* se $\sigma(H) = H$ per ogni $\sigma \in \text{Aut}(G)$. Dimostrare che il centro $Z(G)$ e il sottogruppo dei commutatori G' sono sottogruppi caratteristici di G .
5. Siano $N \subset H \subset G$ sottogruppi.
 - (a) Dimostrare che se H è normale in G ed N è un sottogruppo caratteristico di H , allora N è un sottogruppo normale di G .
 - (b) Esibire un esempio con N è normale in H ed H è normale in G , ma N non è normale in G . (Sugg. prendere $G = D_4$)
6. Sia G un gruppo e sia $f : G \rightarrow G$ la biiezione data da $f(x) = x^{-1}$ per $x \in G$. Dimostrare che G è abeliano se e solo se f è un automorfismo di G .
7. Sia G un gruppo di cardinalità 98. Dimostrare che G è abeliano se e solo se G contiene un unico elemento di ordine 2.
8. Sia p un primo e sia G un gruppo finito semplice di cardinalità divisibile per p^2 . Allora G non ammette sottogruppi di indice p .
9. Sia G un gruppo di cardinalità $992 = 31 \cdot 32$. Dimostrare che G ammette un 2-sottogruppo di Sylow normale oppure un 31-sottogruppo di Sylow normale.
10. Per gli anelli finiti $R = \mathbf{Z}_{91}$, $\mathbf{Z}_{100}$, $\mathbf{Z}[i]/(9 - 2i)$ e $\mathbf{Z}_3[X]/(X^4 - 1)$, scrivere il gruppo moltiplicativo R^* come prodotto di gruppi ciclici.
11. Un *tetraedro italiano* è un tetraedro regolare con faccie di colore bianco, rosso o verde. Quanti tetraedri italiani *essenzialmente diversi* ci sono? (Sugg. il gruppo delle rotazioni dello spazio che preservano un tetraedro regolare è isomorfo al gruppo alter-nante A_4).
12. Sia G un gruppo e sia $D = [G, G]$ il suo sottogruppo dei commutatori. Sia $f : G \rightarrow \text{Aut}(D)$ la mappa data da $x \mapsto \sigma_x$ dove $\sigma_x(h) = xhx^{-1}$ per ogni $h \in D$.
 - (a) Osservare che l'immagine $f(D)$ è il sottogruppo $\text{Inn}(D) \subset \text{Aut}(D)$ degli automorfismi *interni* di D .
 - (b) Dimostrare che $f(D)$ è contenuto nel sottogruppo $[\text{Aut}(D), \text{Aut}(D)]$ dei commutatori di $\text{Aut}(D)$.
 - (c) Dimostrare che il gruppo simmetrico S_3 non può essere sottogruppo dei commutatori di nessun gruppo.