1. Sia $\tau \in S_8$ la permutazione $(1\,2\,3\,4)(5\,6)$. Sia $G \subset S_8$ il sottogruppo generato da τ.
   (a) Determinare le orbite dell'azione di G su $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
   (b) Per ogni $x \in X$, determinare il suo stabilizzatore $G_x \subset G$.

2. Sia X un insieme con un'azione del gruppo G. Sia $g \in G$, sia $x \in X$ e sia H lo stabilizzatore di x. Dimostrare che lo stabilizzatore di gx è uguale a gHg^{-1}.

3. Sia $\mathcal{H} = \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ il semipiano superiore. Definiamo
$$\sigma(z) \;=\; \frac{az+b}{cz+d}, \qquad \text{per } \sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{R}).$$
   (a) Dimostrare che si tratta di un'azione di $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ su $\mathcal{H}$.
   (b) Dimostrare che l'azione è *transitiva*.
   (c) Determinare lo stabilizzatore di $i \in \mathcal{H}$.

4. (a) Sia G un gruppo. Dimostrare che due elementi coniugati di G hanno lo stesso ordine. Vale anche il viceversa?
   (b) Determinare le classi di coniugio del gruppo simmetrico S_4.
   (c) Stessa domanda per il sottogruppo alternante A_4.
   (d) Nelle parti (b) e (c) verificare che la cardinalità di ogni classe di coniugio divide la cardinalità del gruppo.

5. Sia G un gruppo e sia $H \subset G$ un sottogruppo con $[G : H] = n$. Dimostrare che H contiene un sottogruppo N, normale in G, con la proprietà che $[G : N]$ divide $n!$. (Sugg: considerare l'azione di G sulle classi laterali sinistre di H).

6. Sia $n \geq 2$. Sia $H \subset S_n$ un sottogruppo transitivo. In altre parole, l'azione di H su $\{1, 2, \ldots, n\}$ ha un'unica orbita.
   (a) Dimostrare che n divide $\#H$.
   (b) Dimostrare che H contiene un elemento senza punti fissi. (Sugg. usare la formula di Burnside).

7. Per $n \geq 1$ sia $d(n)$ il numero di divisori di n e sia $\phi(n)$ la funzione di Euler.
   (a) Verificare che $d(5) = 2$, $d(6) = 4$ e che $d(12) = 6$.
   (b) Per $n = 5$, $n = 6$ e $n = 12$ verificare l'identità $\phi(n)d(n) = \sum_{a \in \mathbf{Z}_n^*} \gcd(a-1, n)$.

8. (*L'identità di Menon*) Sia $n \geq 1$. Il gruppo $\mathbf{Z}_n^*$ agisce su $\mathbf{Z}_n$ tramite moltiplicazione.
   (a) Dimostrare che il numero di orbite è uguale al numero $d(n)$ di divisori di n.
   (b) Sia $a \in \mathbf{Z}_n^*$. Dimostrare che il numero di punti fissi di a è $\gcd(a-1, n)$.
   (c) Dimostrare l'identità $\phi(n)d(n) = \sum_{a \in \mathbf{Z}_n^*} \gcd(a-1, n)$.

9. Un *cubo italiano* è un cubo con faccie di colore bianco, rosso o verde. Poichè ogni faccia può avere uno qualunque dei tre colori, ci sono a priori $3^6 = 729$ cubi possibili. Però, tanti di questi cubi sono "lo stesso cubo" nel senso che possono essere portati uno nell'altro mediante una opportuna rotazione. Per esempio, da questo punto di vista, tutti i cubi con cinque faccie rosse e una faccia bianca sono lo stesso cubo.

   Quanti cubi italiani *essenzialmente diversi* ci sono?

   (Sugg. il gruppo delle rotazioni dello spazio che preservano un cubo è isomorfo al gruppo simmetrico S_4. Si veda anche Wikipedia: "Burnside's Lemma").