1. Sia R un anello e sia $a \in R$ un elemento invertibile. Siano $b, c \in R$. Dimostrare che se $ba = ca$, allora $b = c$. Dedurne che a ha un unico inverso moltiplicativo.

2. Siano A e B anelli. Dimostrare che $(A \times B)^* = A^* \times B^*$.

3. Sia $f : R \longrightarrow R'$ un omomorfismo di anelli e sia $f^* : R^* \longrightarrow R'$ la restrizione di f a R^*.
   (a) Dimostrare che $f(R^*) \subset R'^*$ e che f^* è un omomorfismo di gruppi $R^* \longrightarrow R'^*$.
   (b) Dimostrare che f^* è iniettivo se f è iniettivo.
   (c) È vero che f^* è suriettivo se f è suriettivo?

4. Sia R un anello. Dimostrare che esiste unico un omomorfismo di anelli $\mathbf{Z} \longrightarrow R$. Dimostrare che esiste unico un omomorfismo di anelli $R \longrightarrow \{0\}$. Qua $\{0\}$ indica l'anello zero.

5. (*Anello di Boole*) Sia X un isieme e sia $P(X)$ l'insieme dei sottoinsiemi di X. Definiamo per $A, B \in P(X)$

$$A + B = A \Delta B \ (= \ A \cup B - A \cap B),$$
$$A \cdot B = A \cap B.$$

   Dimostrare che con quest'addizione e moltiplicazione $P(X)$ diventa un anello commutativo.

6. (a) Sia $f : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}$ un omomorfismo di anelli. Dimostrare che f è l'identità.
   (b) Sia $f : \mathbf{Q} \longrightarrow \mathbf{Q}$ un omomorfismo di anelli. Dimostrare che f è l'identità.
   (c) Sia $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ un omomorfismo di anelli. Dimostrare che $f(x) > 0$ se $x > 0$ e che per ogni $x, y \in \mathbf{R}$ si ha che $f(x) > f(y)$ se $x > y$.
   (d) Sia $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ un omomorfismo di anelli. Far vedere che f è l'identità.
   (e) Esibire un omomorfismo di anelli $f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ che non è l'identità.

7. Sia $\mathbf{H}$ il corpo dei quaternioni.
   (a) Siano $x, y \in \mathbf{H}$ dati da $x = 1 + i + j - k$ e $y = -2 - j + k$.
   Calcolare $x + y$, $x\overline{y}$, $1/x$ e $\overline{y}^2$.
   (b) Dimostrare che $x \in \mathbf{H}$ ha la proprietà che $xy = yx$ per ogni $y \in \mathbf{H}$ se e solo se $x \in \mathbf{R}$.

8. Sia $m \in \mathbf{Z}_{>0}$. Supponiamo che m non sia un quadrato in $\mathbf{Z}$.
   (a) Dimostrare: l'insieme

$$\mathbf{Z}[\sqrt{m}] = \{a + b\sqrt{m} : \ a, b \in \mathbf{Z}\}$$

   è un sottoanello di $\mathbf{R}$.
   (b) Sia $m = 7$. Esibire un elemento invertibile $\varepsilon \neq \pm 1$ nell'anello $\mathbf{Z}[\sqrt{7}]$. (Sugg. Verificare che $a + b\sqrt{7}$ è invertibile se e soltanto se $(a + b\sqrt{7})(a - b\sqrt{7}) = a^2 - 7b^2$ è uguale a ± 1)

9. Dimostrare che per nessun anello il gruppo additivo è isomorfo al gruppo $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. (Sugg: considerare l'uno dell'anello)