1. Sia G un gruppo. Un sottogruppo H di G si dice *caratteristico* se $\sigma(H) = H$ per ogni automorfismo $\sigma \in \text{Aut}(G)$. Dimostrare:
 - (a) i sottogruppi $Z(G)$ e $[G, G]$ sono caratteristici;
 - (b) un sottogruppo caratteristico di G è normale in G ;
 - (c) se $H \subset N \subset G$ sono sottogruppi tali che H è caratteristico in N e N è normale in G , allora H è un sottogruppo normale di G ;
 - (d) dimostrare che l'affermazione della parte (c) non è vera in generale se H è soltanto un sottogruppo normale di N .
2. Per $F = \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ e $\mathbf{C}$ scriviamo F^{*2} per l'insieme $\{x^2 : x \in F^*\}$ dei quadrati di F .
 - (a) Dimostrare che F^{*2} è un sottogruppo del gruppo moltiplicativo F^* .
 - (b) Dimostrare che il quoziente $\mathbf{R}^*/\mathbf{R}^{*2}$ è isomorfo a $\mathbf{Z}_2$. Dimostrare che $\mathbf{C}^*/\mathbf{C}^{*2}$ è il gruppo banale. E dimostrare che $\mathbf{Q}^*/\mathbf{Q}^{*2}$ è un gruppo infinito.
3. Dimostrare che i gruppi S_n e $A_n \times \mathbf{Z}_2$ non sono isomorfi per nessun $n \geq 3$.
4. Siano $n, m \geq 1$ a sia $f : S_n \rightarrow S_m$ un omomorfismo. Dimostrare che $f(A_n) \subset A_m$.
4. Sia $f : \mathbf{Z}_{39}^* \rightarrow \mathbf{Z}_{39}^*$ l'applicazione data da $f(x) = x^6$ per $x \in \mathbf{Z}_{39}^*$.
 - (a) Dimostrare che f è un omomorfismo di gruppi e che $\text{im}(f) \subset \text{ker}(f)$.
 - (b) Quanti elementi ha il gruppo quoziente $\text{ker}(f)/\text{im}(f)$?
5. Determinare tutti gli omomorfismi

(a) $\mathbf{Z}_6 \rightarrow \mathbf{Z}_4$;	(c) $\mathbf{Z}_6 \rightarrow S_3$;	(e) $\mathbf{Z}_8 \rightarrow D_4$;
(b) $S_3 \rightarrow D_4$;	(d) $D_4 \rightarrow \mathbf{Z}_8$;	(f) $V_4 \rightarrow V_4$.

6. (a) Ecco il famoso puzzle di *Sam Loyd* (1841–1911). Ci sono 15 blocchetti, numerati da 1 a 15, in un telaio. Utilizzando l'unica posizione vuota, essi si possono spostare orizzontalmente o verticalmente. Lo scopo del gioco è di ordinare i blocchetti da 1 a 15 per righe. Far vedere che questo è *impossibile* a partire dalla configurazione rappresentata a destra.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

- (b) Lo stesso gioco come in (a). Nonostante le affermazioni della parte (a) di questo esercizio, nella provincia di Trentino sanno ordinare i blocchetti cominciando dalla configurazione rappresentata a destra. Come mai?

(http://en.wikipedia.org/wiki/15_puzzle)

33	tren	tini	entra
rono	a	Trento	tutti
e	33	trot	te
rel	do	lan	

7. Sia n un numero naturale che soddisfa $\text{mcd}(n, 10) = 1$. Dimostrare che la lunghezza del periodo dell'espansione decimale della frazione $1/n$ è uguale all'ordine di $\overline{10}$ nel gruppo $\mathbf{Z}_n^*$.