

1. Sia $t \geq 1$ e siano $n_1, n_2, \dots, n_t$ interi positivi. Dimostrare che $(n_1 + n_2 + \dots + n_t)!$ è divisibile per $n_1!n_2!\dots n_t!$.
2. Siano G_1 e G_2 due gruppi con elementi neutri e_1 rispettivamente e_2 . Dimostrare che $G_1 \times \{e_2\}$ e $\{e_1\} \times G_2$ sono sottogruppi normali di $G_1 \times G_2$.
3. Sia $f : G \longrightarrow H$ un omomorfismo di gruppi. Dimostrare che se H è abeliano, allora il sottogruppo $[G, G]$ dei commutatori è contenuto in $\ker(f)$.
4. Sia $f : G \longrightarrow H$ un omomorfismo di gruppi. Dimostrare che $\ker f$ è un sottogruppo normale di G . È sempre vero che l'immagine di f è un sottogruppo normale di H ?
5. Siano H_1 e H_2 due sottogruppi normali di un gruppo G . Dimostrare che anche $H_1 \cap H_2$ è un sottogruppo normale di G .
6. Sia G un gruppo e siano H, H' due sottogruppi normali di G con la proprietà che G/H e G/H' sono abeliani. Dimostrare che $G/(H \cap H')$ è abeliano.
7. Sia G un gruppo e siano H e H' due sottogruppi di G con le seguenti proprietà:
 - $hh' = h'h$ per ogni $h \in H, h' \in H'$,
 - $H \cap H' = \{e\}$,
 - Per ogni $g \in G$ ci sono $h \in H$ e $h' \in H'$ tali che $g = hh'$.
 Dimostrare che l'applicazione

$$f : H \times H' \longrightarrow G$$

data da $f(h, h') = hh'$ è un isomorfismo.

8. Sia S il sottogruppo moltiplicativo $\{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$ di $\mathbf{C}^*$. Dimostrare che

$$\mathbf{C}^* \cong \mathbf{R}_{>0}^* \times S.$$

(Sugg. utilizzare l'esercizio 7.)

9. Sia G un gruppo e siano $H \subset G$ un sottogruppo di G . Sia $H' \subset H$ un sottogruppo di H .
 - (a) Dimostrare che anche H' è un sottogruppo di G .
 - (b) Esibire un esempio dove H' è un sottogruppo normale di H e H è un sottogruppo normale di G , ma H' non è un sottogruppo normale di G . (Sugg. esibire sottogruppi opportuni di $G = D_4$.)
10. Sia G un gruppo e sia $N \subset G$ un sottogruppo normale di cardinalità 2. Dimostrare che N è contenuto nel centro $Z(G)$ di G .
11. Sia G un gruppo con la proprietà che $G/Z(G)$ è ciclico. Dimostrare che G è abeliano.
12. Sia $n \geq 2$. Determinare il centro e il sottogruppo dei commutatori del gruppo diedrale D_n .
13. (Primo teorema di isomorfismo) Sia $f : G \longrightarrow H$ un omomorfismo di gruppi e sia $N = \ker f$. Dimostrare che la mappa $\bar{f} : G/N \longrightarrow H$ definita da $\bar{f}(gN) = f(g)$ induce un isomorfismo ben definito fra G/N e l'immagine di f .