1. Sia $H \subset \mathbf{Z}_{21}^*$ il sottogruppo generato da $\overline{4}$.
   (a) Scrivere gli elementi di ogni classe laterale di H.
   (b) Dire se $\mathbf{Z}_{21}^*/H$ è ciclico o meno.

2. Sia $H \subset \mathbf{Z}_{31}^*$ il sottogruppo generato da $\overline{2}$.
   (a) Quanti elementi ha H? Quanti elementi ha il gruppo quoziente $\mathbf{Z}_{31}^*/H$?
   (b) Dimostrare che $\mathbf{Z}_{31}^*/H$ è ciclico.
   (c) Determinare l'ordine dell'elemento $\overline{10}H$ di $\mathbf{Z}_{31}^*/H$.

3. Sia $G = \mathbf{Z}_{20}^*$.
   (a) Sia H il sottogruppo generato da $\overline{9}$. Stabilire se il gruppo quoziente G/H è ciclico o meno.
   (b) Sia H il sottogruppo generato da $\overline{19}$. Stabilire se il gruppo quoziente G/H è ciclico o meno.

4. Dimostrare che il gruppo quoziente $\mathbf{C}/\mathbf{R}$ è isomorfo a $\mathbf{R}$.

5. Dimostrare che il gruppo quoziente $\mathbf{R}^*/\{+1, -1\}$ è isomorfo al gruppo additivo $\mathbf{R}$.

6. Sia G il gruppo $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_8$ e sia H il sottogruppo generato dall'elemento v. Nei seguenti casi determinare l'ordine di v e dire se il gruppo quoziente G/H è ciclico o meno.
   (a) $v = (\overline{0}, \overline{2})$; (b) $v = (\overline{1}, \overline{0})$; (c) $v = (\overline{1}, \overline{2})$.

7. Sia $S \subset \mathbf{C}^*$ il sottoinsieme $\{z \in \mathbf{C}^* : |z| = 1\}$.
   (a) Dimostrare che S è un sottogruppo di $\mathbf{C}^*$.
   (b) Chi sono le classi laterali di S?
   (c) Dimostrare che il gruppo $\mathbf{C}^*/S$ è isomorfo al gruppo additivo $\mathbf{R}$.

8. (a) Dimostrare che un sottogruppo di un gruppo ciclico è ciclico. Dimostrare che un quoziente di un gruppo ciclico è ciclico.
   (b) Dimostrare che per ogni sottogruppo H di $\mathbf{Z}_m$ esiste un divisore d di m tale che $H = \{\overline{a} \in \mathbf{Z}_m : d \text{ divide } a\}$. Enumerare i sottogruppi di $\mathbf{Z}_{12}$.

9. Consideriamo il sottogruppo $\mathbf{Z}$ di $\mathbf{R}$. Per ogni $t \in \mathbf{R}$ indichiamo la classe laterale $t + \mathbf{Z} = \{t + k : k \in \mathbf{Z}\}$ con $\overline{t}$. Dimostrare che l'applicazione

$$\phi : \mathbf{R}/\mathbf{Z} \longrightarrow S$$

data da

$$\phi(\overline{t}) = \cos(2\pi t) + i\,\mathrm{sen}(2\pi t),$$

è ben definita ed è un isomorfismo di gruppi.