

1. Esprimere le seguenti permutazioni nel gruppo simmetrico  $S_9$  come prodotti di cicli disgiunti. Calcolare gli inversi.

$$(a) \quad \sigma : \begin{cases} 1 \mapsto 9, & 4 \mapsto 1, & 7 \mapsto 2, \\ 2 \mapsto 7, & 5 \mapsto 3, & 8 \mapsto 5, \\ 3 \mapsto 8, & 6 \mapsto 4, & 9 \mapsto 6. \end{cases} \quad (b) \quad \tau : \begin{cases} 1 \mapsto 8, & 4 \mapsto 6, & 7 \mapsto 9, \\ 2 \mapsto 2, & 5 \mapsto 5, & 8 \mapsto 1, \\ 3 \mapsto 3, & 6 \mapsto 4, & 9 \mapsto 7. \end{cases}$$

2. Scrivere la permutazione  $(1\ 9\ 6\ 4\ 3\ 8\ 7)(1\ 3\ 7\ 4\ 8\ 6\ 2)(2\ 7\ 1)$  come prodotto di cicli disgiunti.
3. Siano  $\sigma, \tau$  permutazioni nel gruppo simmetrico  $S_n$ .
- (a) Sia  $a \in \{1, 2, \dots, n\}$  e sia  $b = \tau(a)$ . Far vedere che la permutazione  $\sigma\tau\sigma^{-1}$  manda  $\sigma(a)$  in  $\sigma(b)$ .
- (b) Se  $\tau = (a_1\ a_2\ \dots\ a_k)$  è un  $k$ -ciclo, allora  $\sigma\tau\sigma^{-1}$  è il ciclo  $(\sigma(a_1)\ \sigma(a_2)\ \dots\ \sigma(a_k))$ .
- (c) Dimostrare che se  $\tau$  è un prodotto di  $t$  cicli disgiunti di lunghezze  $k_1, k_2, \dots, k_t$ , allora questo è vero anche per  $\sigma\tau\sigma^{-1}$ .
4. Siano  $\sigma, \tau \in S_n$ . Dimostrare che se la permutazione  $\sigma\tau$  è un prodotto di  $t$  cicli disgiunti di lunghezze  $k_1, k_2, \dots, k_t$ , allora questo è vero anche per  $\tau\sigma$ .
5. Determinare l'ordine di ogni elemento del gruppo diedrale  $D_4$ . Stessa domanda per il gruppo moltiplicativo  $\mathbf{Z}_{16}^*$ .
6. Sia  $G$  un gruppo finito di cardinalità  $n$ . Dimostrare che  $G$  è ciclico se e solo se esiste un elemento  $g \in G$  di ordine  $n$ .
7. Sia  $G$  un gruppo e sia  $x \in G$  un elemento di ordine  $n$ . Dimostrare che per ogni  $y \in G$  l'elemento  $xyx^{-1}$  ha anche ordine  $n$ .
8. Dimostrare che le seguenti applicazioni sono omomorfismi ben definiti:
- (a)  $\mathbf{R}^* \longrightarrow \mathbf{R}^* \quad x \mapsto |x|,$
- (b)  $\mathbf{Z}_{10} \longrightarrow \mathbf{Z}_5 \quad x \pmod{10} \mapsto x \pmod{5},$
- (c)  $\mathbf{Z}_{10}^* \longrightarrow \mathbf{Z}_5^* \quad x \pmod{10} \mapsto x \pmod{5},$
- (d)  $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}^* \quad x \mapsto \cos(x) + \operatorname{sen}(x)i,$
- (e)  $\mathbf{C}^* \longrightarrow \mathbf{R}^* \quad a + bi \mapsto a^2 + b^2,$

Quali sono iniettivi e quali suriettivi? Determinare i nuclei e le immagini.

9. Sia  $f : G \longrightarrow H$  un'omomorfismo di gruppi. Sia  $g \in G$  un elemento di ordine  $m$ . Dimostrare che l'ordine dell'elemento  $f(g)$  di  $H$  divide  $m$ .
10. Sia  $G$  un gruppo e sia  $g \in G$  e sia  $H \subset G$  un sottogruppo. Dimostrare che  $gHg^{-1} = \{gxg^{-1} : x \in H\}$  è anche un sottogruppo di  $G$ .
11. Sia  $G$  un gruppo. Dimostrare che l'applicazione  $F : G \longrightarrow G$  data da  $F(x) = x^2$  è un omomorfismo se e soltanto se  $G$  è abeliano. Dimostrare che l'applicazione  $x \mapsto x^{-1}$  è un omomorfismo se e soltanto se  $G$  è abeliano.
12. Provare che il gruppo moltiplicativo  $\mathbf{Z}_{12}^*$ , il gruppo diedrale  $D_2$  e il gruppo  $P(X)$  sono tutti isomorfi. Qua  $P(X)$  indica l'insieme delle parti di  $X = \{0, 1\}$  con composizione la differenza simmetrica.