1. Per i seguenti insiemi G e "composizioni" $*$, indicare, se esiste, un elemento neutro. Dire quando si tratta di un gruppo:
   (a) $G = \mathbf{Z}_{>0}$ con $a * b = a^b$.
   (b) $G = \mathbf{R}$ con $a * b = a + b + 3$,
   (c) $G = \mathbf{R}_{>1}$ con $a * b = a^{\log(b)}$.
   (d) $G = \{-1, 0, 1\}$ con $a * b = a + b$.
   (e) $G = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ con $a * b = \max(a, b)$.
   (f) $G = \mathbf{R}^2$ con $\binom{a}{b} * \binom{c}{d} = \binom{c+ad}{bd}$.

2. (a) Sia G un gruppo e siano $a, b \in G$. Dimostrare che l'unica soluzione dell'equazione
$$ax = b$$
in G è data da $x = a^{-1}b$. Similmente, dimostare che esiste una unica soluzione $x \in G$ di $xa = b$, vale a dire $x = ba^{-1}$.
   (b) (Proprietà Sudoku) Provare che, nella tabella di composizione di un gruppo finito, ogni elemento compare esattamente una volta in ogni riga ed ogni colonna.

3. Sia X un insieme e sia $P(X)$ l'insieme delle parti di X. *La differenza simmetrica* $A \triangle B$ di due sottoinsiemi A e B di X è definita da
$$A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B).$$
Dimostrare che $P(X)$ con la composizione $\triangle$ è un gruppo abeliano. Scrivere la tabella di composizione per un insieme X di due elementi.

4. Sia G un gruppo con elemento neutro e.
   (a) Provare: se $x^2 = e$ per ogni $x \in G$, allora G è commutativo.
   (b) Provare: se $a^{-1}b^{-1} = (ab)^{-1}$ per ogni $a, b \in G$, allora G è commutativo.
   (c) Provare: se $a^2b^2 = (ab)^2$ per ogni $a, b \in G$, allora G è commutativo.

5. Una trasformazione *affine* di $\mathbf{R}$ è una applicazione $A : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ data da
$$x \mapsto ax + b, \quad \text{per ogni } x \in \mathbf{R},$$
per qualche $a \in \mathbf{R}^*$ e $b \in \mathbf{R}$. Dimostrare che le trasformazioni affini di $\mathbf{R}$ formano un gruppo con la composizione. Si tratta di un gruppo commutativo?

6. Determinare quali sottoinsiemi sono sottogruppi:
   (a) $\{x \in \mathbf{Q} : x > 0\} \subset \mathbf{Q}^*$,
   (b) $\{x \in \mathbf{R} : x > 1\} \subset \mathbf{R}^*$,
   (c) $\{\pm 1, \pm i\} \subset \mathbf{C}^*$,
   (d) $\{\overline{x} \in \mathbf{Z}_n^* : x \equiv 1 \pmod{d}\} \subset \mathbf{Z}_n^*$ per d un divisore di n,
   (e) il gruppo diedrale D_n del gruppo ortogonale O_2,
   (f) $\{x \in \mathbf{Q}^* :$ esistono $a, b \in \mathbf{Q}$ tali che $x = a^2 + b^2\} \subset \mathbf{Q}^*$.

7. Per $n \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$ sia D_n il gruppo diedrale. Dimostrare che D_d è un sottogruppo di D_n se e solo se d divide n.

8. Dimostrare che un sottogruppo di un gruppo abeliano è abeliano. Dare un esempio di un gruppo non abeliano con sottogruppo abeliano non banale.