1. (a) Dimostrare che se $n \geq 2$ non è primo, allora esiste un primo $p \leq \sqrt{n}$ che divide n.
   (b) Sfruttare il risultato (a) per dimostrare che 467 è primo

2. Fattorizzare i seguenti numeri in fattori primi.
   (a) 91; (c) $15^2 - 2^2$; (e) $2^{10} - 1$;
   (b) 210; (d) $10!$; (f) $2^{11} - 1$;

3. Determinare il resto delle divisioni per 3, 9, 4, 11 del numero 3548917.

4. Calcolare $\mathrm{mcd}(623, 413)$, $\mathrm{mcd}(1014, 273)$ e $\mathrm{mcd}(1122, 105)$.

5. Siano a e b interi con $\mathrm{mcd}(a, b) = d$. Dimostrare che $\mathrm{mcd}(a/d, b/d) = 1$.

6. Siano $n, m \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$. Siano $\mathrm{mcd}(n, m)$ e $\mathrm{mcm}(n, m)$ il massimo comun divisore e il minimo comune multiplo fra n ed m. Dimostrare che $\mathrm{mcm}(n, m) \cdot \mathrm{mcd}(n, m) = nm$.

7. Per i seguenti numeri n e m, determinare $a, b \in \mathbf{Z}$ tali che $an + bm = \mathrm{mcd}(n, m)$.
   (a) $n = 4$ e $m = 30$; (c) $n = 103$ e $m = 101$;
   (b) $n = 14$ e $m = 40$; (d) $n = 91$ e $m = 0$.

8. (a) Scrivere il numero 123 in base 2 e in base 7;
   (b) Scritto in base 2 sia $n = 10010001001$. Esprimere n in base 3;
   (c) Scritto in base 16, siano $n = AB$ e $m = 9C$. Calcolare nm e scrivere il risultato in base 16.

9. Siano p e q due primi consecutivi. Dimostrare che $p + q$ non è un prodotto di due numeri primi.

10. Sia $x = x_n x_{n-1} \ldots x_0$ un numero intero positivo rappresentato in base 10. Far vedere che $x \equiv x_0 - x_1 + x_2 - \ldots + (-1)^n x_n \pmod{11}$. Decidere se 1213141516171819 è divisibile per 11.

11. (a) Per $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ determinare il resto della divisione per $p = 7$ di 5^k.
    (b) Stessa domanda, ma per per $p = 11$ e per $p = 13$.
    (c) Per $p = 7$, 11 e 13 determinare il resto della divisione di 5^{2019} per p.

12. Andare al sito `https://www.flashlightcreative.net/swf/mindreader/` (anche raggiungibile dalla pagina web del corso). Spiegare come mai la sfera magica riesce a sempre indovinare il simbolo giusto.