1. Sia R un anello commutativo. Dimostrare che
$$I = \{f(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots \in R[X] : a_0 = a_1 = a_2 = 0\}$$
è un ideale di $R[X]$.

2. Sia R un anello e supponiamo che l'applicazione $f : R \longrightarrow R$ data da $f(x) = x^2$ sia un omomorfismo di anelli.
   (a) Dimostrare che R è un anello commutativo.
   (b) Dimostrare che per ogni $x \in R$ si ha $x + x = 0$.
   (c) Dimostrare che se $x \in \ker(f)$, allora $1 + x \in R^*$.

3. Sia $\mathbf{R}$ il campo dei numeri reali e sia A l'anello $\mathbf{R}[X]/(X^2)$. Sia $\phi : \mathbf{R}[X] \longrightarrow \mathbf{R} \times A$ l'applicazione data da $\phi(g) = (g(1), \overline{g})$ per $g \in \mathbf{R}[X]$. Qua $\overline{g} \in A$ indica la classe modulo X^2 di g.
   (a) Dimostrare che ϕ è un omomorfismo suriettivo di anelli.
   (b) Esibire un generatore del nucleo di ϕ.

4. Siano $a, b \in \mathbf{Z}_{>0}$ due interi coprimi.
   (a) Per $n \in \mathbf{Z}_{>0}$ dimostrare che anche a^n e b^n sono coprimi.
   (b) Supponiamo che $ab = c^m$ per qualche $c \in \mathbf{Z}$ ed esponente $m \geq 1$. Dimostrare che sia a che b sono m-esima potenza in $\mathbf{Z}$.

5. Sia R un anello comutativo e siano $I, J \subset R$ due ideali coprimi (questo vuol dire che $I + J = R$).
   (a) Dimostrare che per ogni $n \in \mathbf{Z}_{>0}$ gli ideali I^n e J^n sono anche coprimi.
   (b) Supponiamo che $IJ = K^m$ per un ideale K e un esponente $m \geq 1$. Dimostrare che sia I che J è m-esima potenza di qualche ideale di R.

6. Sia $I \subset \mathbf{Z}[X]$ l'ideale generato dai polinomi $X^2 - 1$ e $X^2 + 1$. Quanti sono gli elementi invertibili dell'anello quoziente $\mathbf{Z}[X]/I$?

7. Sia $I \subset \mathbf{Z}[X, Y]$ l'ideale generato generato da $X^2 - Y$, $Y - 1$ e 3. Calcolare la cardinalità del gruppo degli elementi invertibili del anello quoziente $\mathbf{Z}[X, Y]/I$.

8. Sia R l'insieme delle successioni $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ con $a_k \in \mathbf{Q}$, con somma e prodotto definiti come segue: $(a_k)_{k=1}^{\infty} + (b_k)_{k=1}^{\infty} = (a_k + b_k)_{k=1}^{\infty}$ e $(a_k)_{k=1}^{\infty} \cdot (b_k)_{k=1}^{\infty} = (a_k b_k)_{k=1}^{\infty}$. Sia
$$S = \{(a_k)_{k=1}^{\infty} \in R : \forall \epsilon \in \mathbf{Q}_{>0}\ \exists k \geq 1 \text{ tale che } |a_i - a_j| < \epsilon \text{ per ogni } i, j > k\}.$$
Sia $I = \{(a_k)_{k=1}^{\infty} \in R : \forall \epsilon \in \mathbf{Q}_{>0}\ \exists k \geq 1$ tale che $|a_i| < \epsilon$ per ogni $i > k\}$.
   (a) Dimostrare che R è un anello commutativo.
   (b) Dimostrare che S è un sottoanello di R.
   (c) Dimostrare che I è un ideale di S.
   (d) Chi è l'anello quoziente S/I?