

1. Sia $G = \mathbf{Z}_{33}^*$ e sia H il sottogruppo generato da $\bar{4}$. Stabilire se il gruppo quoziente G/H è ciclico o meno.
2. Stabilire se il gruppo alternante A_4 è isomorfo o meno al gruppo diedrale D_6 . Spiegare la risposta.
3. Dimostrare che ogni numero naturale n con $\text{mcd}(n, 10) = 1$ divide un numero della forma $11111 \dots 11111$ (per esempio, 37 divide 111 ; sugg: prima dimostrare che n divide un numero della forma $9999 \dots 9999$).
4. Esibire un numero naturale n tale che $\phi(n) = 2020$ o dimostrare che non esiste. Qua ϕ indica la funzione di Euler.
5. Dimostrare che il gruppo simmetrico S_5 contiene un elemento di ordine 6. Esibire $n > 1$ tale che il gruppo simmetrico S_n contiene un elemento di ordine almeno n^2 .
6. Sia G un gruppo finito con la proprietà che $\text{Aut}(G)$ è banale.
 - (a) Dimostrare che G è abeliano;
 - (b) Dimostrare che ogni elemento di G ha ordine ≤ 2 ;
 - (c) Dimostrare che $\#G = 1$ oppure 2 .
7. Determinare le cardinalità dei seguenti anelli:
 - (a) $\mathbf{Z}[X]/(X^3 + X + 1, X - 1, 3)$;
 - (b) $\mathbf{Z}[X, Y]/(Y^2 - X, Y - 3X, X - 2)$;
 - (c) $\mathbf{Z}_3[X, Y, Z]/(Y^2 - X^2, Y - Z^3, X - Z)$;
 - (d) $\mathbf{Z}[i]/(12 - i, 29)$.
8. Sia R un anello commutativo. Un elemento $e \in R$ si dice *idempotente* se $e^2 = e$.
 - (a) Determinare gli elementi idempotenti degli anelli \mathbf{Z}_6 e di \mathbf{Z}_9 .
 - (b) Sia k un campo e sia $n \geq 1$. Determinare gli elementi idempotenti dell'anello k^n .
 - (c) Dimostrare che se $e \in R$ è idempotente, anche $1 - e$ è idempotente.
 - (d) Dimostrare che l'insieme E degli elementi idempotenti di R formano un gruppo con l'operazione $e * f = (e - f)^2$ per $e, f \in E$.
9. Un elemento x di un anello R si dice *nilpotente* se $x^n = 0$ per qualche $n \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$.
 - (a) Determinare gli elementi nilpotenti degli anelli \mathbf{Z}_6 e \mathbf{Z}_{24} .
 - (b) Dimostrare che gli elementi nilpotenti di un anello commutativo R formano un ideale.
10. Scrivere il polinomio $(X^2 + 1)(Y^2 + 1)(Z^2 + 1)$ come polinomio nei polinomi simmetrici elementari $s_1, s_2, s_3 \in \mathbf{Z}[X, Y, Z]$.