

1. Scrivere ogni intero $n = 22, 23, \dots, 33$ come somma di quattro quadrati di numeri interi. Se possibile scrivere n come somma di tre quadrati. Se possibile scrivere n come somma di due quadrati.
2. Sia m un intero congruo a 7 (mod 8). Dimostrare che m non è somma di tre quadrati di numeri interi. Dimostrare che per ogni $a \geq 0$, il numero $4^a m$ non è somma di tre quadrati di numeri interi (infatti, ogni numero intero $m > 0$ che *non* è di questo tipo è somma di tre quadrati (Legendre 1797)).
3. Sia $p = 71$ e sia $z = 1 + 14i + 4j$. Fattorizzare $N(p)$ e $N(z)$. Esibire un quaternione intero y più vicino possibile al quaternione p/z . Calcolare la norma $N(p - yz)$.
4. Sia $p > 2$ un primo. Sia R l'anello $\mathbf{Z}_p[X]/(X^2 + 1)$.
 - (a) Determinare $\#R^*$ (la risposta dipende dalla classe di p (mod 4)).
 - (b) Dimostrare che l'applicazione $\phi : R^* \rightarrow \mathbf{Z}_p^*$ data da $a + bX \mapsto a^2 + b^2$ è un omomorfismo di gruppi.
 - (c) Dimostrare che ϕ è suriettivo.
 - (d) Dato $t \in \mathbf{Z}_p^*$, quante copie $(a, b) \in \mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_p$ con $a^2 + b^2 = t$ ci sono? (Sugg: La risposta dipende solo da p e non da t).
5. Scrivere $X^2Y^2 + Y^2Z^2 + Z^2X^2$ come polinomio nei polinomi simmetrici elementari $s_1, s_2, s_3 \in \mathbf{Z}[X, Y, Z]$. Stessa domanda per $XY^3 + YX^3 + XZ^3 + ZX^3 + ZY^3 + YZ^3$.
6. Siano α, β, γ gli zeri complessi del polinomio $X^3 + X^2 + 1$. Determinare l'intero

$$\det \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{pmatrix}.$$

7. Siano $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_7 \in \mathbf{C}$ tali che $X^7 + X + 2 = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \cdots (X - \alpha_7)$.
 - (a) Determinare $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_7$;
 - (b) Dimostrare che $\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \cdots + \alpha_7^3 = 0$;
 - (c) Determinare $\alpha_1^7 + \alpha_2^7 + \cdots + \alpha_7^7$.
8. Siano s_1, s_2 i due polinomi simmetrici elementari in $\mathbf{Z}[X, Y]$. Per $n \geq 1$ sia p_n il polinomio simmetrico $X^n + Y^n$.
 - (a) Sia $n \geq 2$. Dimostrare che $p_{n+1} = s_1 p_n - s_2 p_{n-1}$.
 - (b) Scrivere p_6 come polinomi in s_1 e s_2 .
9. Sia $f \in \mathbf{Q}[X]$ di grado d e siano $\alpha_1, \dots, \alpha_d \in \mathbf{C}$ gli zeri di f . Il *discriminante* $\Delta(f)$ di f è definito da

$$\Delta(f) = \prod_{1 \leq i < j \leq d} (\alpha_i - \alpha_j)^2.$$

- (a) Dimostrare che $\Delta(f) = 0$ se e solo se f ha zeri doppi.
- (b) Dimostrare che $\Delta(f) \in \mathbf{Q}$.