

1. Sia  $A$  un dominio finito. Dimostrare che  $A$  è un campo.
2. Sia  $\mathbf{H}$  il corpo dei quaternioni. Un quaternione “puro” è un quaternione della forma  $bi + cj + dk$  con  $b, c, d \in \mathbf{R}$ . Dimostrare che i quaternioni puri  $x$  di norma  $x\bar{x} = 1$  soddisfano  $x^2 = -1$  e formano una sfera nello spazio vettoriale tredimensionale dei quaternioni puri.
3. In questo esercizio i calcoli vanno fatti nell’anello  $\mathbf{Z}[X]$ .
  - (a) Determinare il resto della divisione di  $f = 2X^3 - 3X + 2$  per  $g = X^2 - 2X + 5$ .
  - (b) Dimostrare che non è possibile dividere  $f = 2X^3 - 3X + 2$  per  $h = 3X + 1$  con resto zero oppure di grado  $< 1 = \deg(h)$ .
4.
  - (a) Determinare una radice primitiva  $\bar{g}$  in  $\mathbf{Z}_{13}^*$ .
  - (b) Sia  $g$  la radice primitiva modulo 13 calcolata nella parte (a). Calcolare  $m \in \mathbf{Z}$  tale che  $10 = \bar{g}^m$  in  $\mathbf{Z}_{13}^*$ .
  - (c) Stesse domande per il primo 41 invece di 13.
5. Il numero 641 è primo. Quante radici primitive ci sono in  $\mathbf{Z}_{641}^*$ ?
6. Dire se i seguenti sottoinsiemi sono ideali o meno:
  - (a)  $\mathbf{R}$  di  $\mathbf{C}$ ;
  - (b)  $\{f \in \mathbf{Z}[X] : f(0) = 1\}$  di  $\mathbf{Z}[X]$ ;
  - (c)  $\{a + bi \in \mathbf{Z}[i] : a \text{ e } b \text{ hanno la stessa parità}\}$  di  $\mathbf{Z}[i]$ .
  - (d)  $\{\bar{a} \in \mathbf{Z}_{91} : \bar{a} \text{ è divisore dello zero}\}$  di  $\mathbf{Z}_{91}$ .
7. Siano  $A$  e  $B$  due anelli commutativi.
  - (a) Dimostrare che  $A \times \{0\}$  e  $\{0\} \times B$  sono ideali dell’anello prodotto  $A \times B$ .
  - (b) Calcolare somma, prodotto e intersezione degli ideali della parte (a).
8. Siano  $A$  e  $B$  due anelli commutativi.
  - (a) Siano  $I \subset A$  e  $J \subset B$  ideali. Dimostrare che  $I \times J$  è un ideale di  $A \times B$ .
  - (b) Dimostrare che ogni ideale di  $A \times B$  ha la forma  $I \times J$  dove  $I$  è un ideale di  $A$  e  $J$  è un ideale di  $B$ .
9. Sia  $R$  un anello commutativo e siano  $I, J \subset R$  due ideali di  $R$ . Dimostrare che  $I \cup J$  è un ideale se e soltanto se  $I \subset J$  oppure  $J \subset I$ .
10. Siano  $I, J$  ideali di un anello commutativo  $A$ . Dimostrare che se  $I + J = A$ , allora  $IJ = I \cap J$ .
11. Dimostrare che l’ideale  $(X, Y)$  dell’anello  $\mathbf{Q}[X, Y]$  non è principale.
12. Sia  $R$  l’anello  $\mathbf{Z}[X]$ , sia  $I$  l’ideale generato da  $X^2 + 2$  e sia  $J$  l’ideale  $(4, X)$ .
  - (a) Dimostrare che l’anello  $R/I$  è infinito.
  - (b) Dimostrare che l’anello quoziente  $R/J$  ha quattro elementi.
  - (c) Sia  $K$  l’ideale  $I + J$ . L’anello  $R/K$ , quanti elementi ha?