Algebra 1 (Schoof) 2^o esonero 28 gennaio 2020, ore 10:00–12:00.

COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Sia A un dominio finito. Dimostrare che A è un campo.
2. Un elemento x di un anello R si dice *nilpotente* se $x^n = 0$ per qualche $n \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$. Dimostrare che gli elementi nilpotenti di un anello commutativo R formano un ideale.
3. Siano I e J gli ideali di $\mathbf{Z}[X]$ dati da $I = (3, X)$ e $J = (5, X)$. Determinare la cardinalità del gruppo degli elementi invertibili dell'anello quoziente $\mathbf{Z}[X]/IJ$.
4. Quanti omomorfismi di anelli $\mathbf{Z}[X]/(X^2 - 2) \longrightarrow \mathbf{Z}_7$ ci sono?
5. L'anello $\mathbf{R}[X]/(X^3 - 1)$, quanti ideali contiene?
   Stessa domanda per l'anello $\mathbf{R}[X, Y]/(X^2, XY, Y^2)$.
6. Sia A un dominio euclideo rispetto alla funzione $N : A - \{0\} \longrightarrow \mathbf{N}$. Sia m l'elemento più piccolo nell'immagine di N. Dimostrare: se per $a \in A - \{0\}$ si ha che $N(a) = m$, allora a è invertibile in A.

Soluzioni.

1. Questo è l'esercizio 1 del foglio 10.
2. Questo è l'esercizio 9 del foglio 13.
3. Si ha che $IJ = (X^2, 3X, 5X, 15) = (X, 15)$. L'anello $\mathbf{Z}[X]/IJ$ è quindi isomorfo a $\mathbf{Z}_{15}$ ed ha $\phi(15) = 8$ elementi invertibili. Alternativamente osservare gli $(3, X)$ e $(5, X)$ sono ideali coprimi ed applicare il teorema cinese del resto.
4. Sia $f : \mathbf{Z}[X]/(X^2 - 2) \longrightarrow \mathbf{Z}_7$ un omomorfismo di anelli. Allora $f(\overline{X})^2 = \overline{2}$ in $\mathbf{Z}_7$. In altre parole, $f(X)$ è uno zero del polinomio $Y^2 - \overline{2} \in \mathbf{Z}_7[Y]$. Poiché gli zeri di $Y^2 - \overline{2}$ sono $\pm\overline{3}$, ci sono due omomorfismi di anelli: valutare in $\overline{3}$ e valutare in $-\overline{3}$.
5. Abbiamo che $X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)$ in $\mathbf{R}[X]$. Per il Teorema cinese del resto l'anello $\mathbf{R}[X]/(X^3 - 1)$ è quindi isomorfo a $\mathbf{R} \times \mathbf{C}$. Gli ideali di $\mathbf{R} \times \mathbf{C}$ sono prodotti di ideali di rispettivamente $\mathbf{R}$ e $\mathbf{C}$. Poiché $\mathbf{R}$ e $\mathbf{C}$ sono campi, ci sono $2 \times 2 = 4$ ideali. Alternativamente, osservare che gli ideali di $\mathbf{R}[X]/(X^3 - 1)$ corrispondono biiettivamente agli ideali di $\mathbf{R}[X]$ che contengono $X^3 - 1$. Poiché $\mathbf{R}[X]$ è un PID si tratta degli ideali generati da divisori monici di $X^3 - 1$. Ce ne sono 4.
   Per la seconda domanda osserviamo che l'ideale (X, Y) è uno spazio vettoriale di dimensione 2 su $\mathbf{R}$. I suoi sottospazi 1-dimensionali sono anche ideali di $\mathbf{R}[X, Y]/(X^2, XY, Y^2)$. Ci sono quindi infiniti ideali.
6. Dividiamo 1 per a con resto r. Abbiamo quindi che $1 = qa + r$ con $r = 0$ oppure $N(r) < N(a)$. Per la minimalità di $N(a)$, la seconda possibilità è impossibile. Questo implica che $r = 0$ e che $qa = 1$. In particolare, a è invertibile.