Algebra 1 (Schoof) 1^o esonero 27 novembre 2019, ore 14:00–16:00.

COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Sia G un gruppo e sia $N \subset G$ un sottogruppo normale di cardinalità 2. Dimostrare che N è contenuto nel centro $Z(G)$ di G.

2. Nel gruppo simmetrico S_{10} siano dati $\sigma = (1\,5\,2\,7\,4\,6\,9\,3\,8)$ e $\tau = (1\,7\,5\,6\,3)$. Determinare l'ordine e il segno di $\sigma\tau$.

3. Sia $H \subset \mathbf{Z}_{21}^*$ il sottogruppo generato da $\overline{4}$.
   (a) Scrivere gli elementi di ogni classe laterale di H.
   (b) Dire se $\mathbf{Z}_{21}^*/H$ è ciclico o meno.

4. Sia G un gruppo e sia $H \subset G$ un sottogruppo che contiene il sottogruppo dei commutatori $[G, G]$. Dimostrare che H è un sottogruppo normale di G.

5. Sia X il gruppo diedrale D_4 e sia

$$R = \{(x, y) \in X \times X : \text{l'ordine di } x \text{ è uguale all'ordine di } y\}.$$

   (a) Dimostrare che R è una relazione di equivalenza su X.
   (b) Quante classi di equivalenza ci sono?

6. Sia G il gruppo additivo $\mathbf{Z}_{12} \times \mathbf{Z}_{12}$ e sia H il sottogruppo diagonale $\{(\overline{x}, \overline{x}) : \overline{x} \in \mathbf{Z}_{12}\}$.
   (a) Quanti elementi ha il gruppo quoziente G/H?
   (b) Sia $g \in G$ l'elemento $(\overline{2}, \overline{8})$. Determinare l'ordine dell'elemento gH di G/H.

Soluzioni.

1. Questo è l'esercizio 10 del foglio 7.
2. $\sigma\tau = (1\,4\,6\,8)(2\,7)(3\,5\,9)$. L'ordine è 12 e il segno è $+1$.
3. Questo è l'esercizio 1 del foglio 6.
4. Sia $h \in H$ e sia $g \in G$. Allora $ghg^{-1} = [g, h]h$. Siccome il commutatore $[g, h]$ sta in $[G, G] \subset H$, l'elemento $[g, h]h$ è in H. Ne segue che H è normale in G.
5. Due elementi di D_4 stanno nella stessa classe di equivalenza se e solo se hanno lo stesso ordine. Poiché gli elementi di D_4 hanno ordine 1, 2 o 4, ci sono tre classi di equivalenza.
6. Il gruppo quoziente ha $[G : H] = 12^2/12 = 12$ elementi. Poiché $(\overline{2}, \overline{8}) + (\overline{2}, \overline{8}) = (\overline{4}, \overline{4})$ è un elemento di H, l'ordine della classe laterale di $(\overline{2}, \overline{8})$ è 2.