COGNOME

NOME

Ogni esercizio vale 5 punti. Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali*. Consegnare SOLO la bella copia.

1. Esibire $n > 1$ tale che il gruppo simmetrico S_n contiene un elemento di ordine almeno n^2 .
2. Quanti omomorfismi di anelli $\mathbf{Z}[X, Y]/(XY - 1) \rightarrow \mathbf{Z}_8$ ci sono?
3. Sia I l'ideale di $\mathbf{Z}[X]$ generato da 4 e X . Sia J l'ideale di $\mathbf{Z}[X]$ generato da 6 e X . L'anello quoziente $\mathbf{Z}[X]/IJ$, quanti elementi ha?
4. Sia G un gruppo. Un sottogruppo H di G si dice *caratteristico in G* se $\sigma(H) = H$ per ogni automorfismo $\sigma \in \text{Aut}(G)$. Dimostrare: se $H \subset N \subset G$ sono sottogruppi tali che H è caratteristico in N e N è normale in G , allora H è un sottogruppo normale di G .
5. Sia G il gruppo $\mathbf{Z}_6 \times \mathbf{Z}_6$ e sia H il sottogruppo generato dagli elementi $(\bar{2}, \bar{1})$ e $(\bar{3}, \bar{3})$. Calcolare $[G : H]$.
6. Sia $\phi : \mathbf{Q}[X, Y] \rightarrow \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ l'omomorfismo di anelli determinato da $\phi(X) = (1, 0)$ e $\phi(Y) = (0, 1)$.
 - (a) Dimostrare che ϕ è suriettivo.
 - (b) Esibire un insieme di generatori del nucleo di ϕ .

Soluzioni.

1. Questo è l'esercizio 13 del foglio 5.
2. Sia X l'insieme degli omomorfismi $f : \mathbf{Z}[X, Y]/(XY - 1) \rightarrow \mathbf{Z}_8$. Notiamo che $f(X)$ è invertibile in $\mathbf{Z}_8$, perché $f(X)f(Y) = f(XY) = f(1) = \bar{1}$. Definiamo l'applicazione $\phi : X \rightarrow \mathbf{Z}_8^*$ data da $\phi(f) = f(X)$. Poiché f è determinata da $f(X)$, la mappa ϕ è iniettiva. Viceversa, per ogni $a \in \mathbf{Z}_8^*$ la valutazione in a, a^{-1} è un omomorfismo ben definito $v : \mathbf{Z}[X, Y] \rightarrow \mathbf{Z}_8$. Poiché $XY - 1$ sta nel nucleo, v si fattorizza $\bar{v} : \mathbf{Z}/(XY - 1) \rightarrow \mathbf{Z}_8$. Dal fatto che $\phi(\bar{v}) = a$, segue che ϕ è biiettiva. Ci sono quindi $\#\mathbf{Z}_8^* = 4$ omomorfismi di anelli.
3. Poiché $\text{mcd}(4, 6) = 2$, si ha che $IJ = (4, X)(6, X) = (24, 2X, X^2)$. L'anello quoziente $\mathbf{Z}[X, Y]/IJ$ ha quindi $2 \cdot 24 = 48$ elementi.
4. Questo è l'esercizio 1 del foglio 8.
5. Poiché $(\bar{2}, \bar{1})$ ha ordine 6, il sottogruppo H' generato da $(\bar{2}, \bar{1})$ ha 6 elementi. Siccome $(\bar{3}, \bar{3}) \notin H'$ ma $(\bar{3}, \bar{3}) + (\bar{3}, \bar{3}) = (\bar{0}, \bar{0})$, il sottogruppo H consiste di H' e la classe laterale $(\bar{3}, \bar{3}) + H'$. Si ha quindi che $\#H' = 2 \cdot 6 = 12$ e $[G : H] = 3$.
6. (a) Poiché $\phi(aX + bY) = (a, b)$ per ogni $a, b \in \mathbf{R}$, la mappa ϕ è suriettiva. (b) Sia J l'ideale generato da $X^2 - X, XY, Y^2 - Y$ e $X + Y - 1$. Allora $J \subset \ker \phi$. Viceversa, sia $F \in \ker \phi$. Allora F è congruo ad un polinomio della forma $aX + bY + c$ modulo l'ideale generato da $X^2 - X, XY, Y^2 - Y$. Il fatto che $\phi(F) = 0$ vuol dire che $b + c = a + c = 0$ e quindi $aX + bY + c = a(X + Y - 1)$. Poiché $X + Y - 1 \in J$, concludiamo che $F \in J$.