Algebra 1 (Schoof) 5^o appello 8 settembre 2020, ore 10:00–12:00.

Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Ogni esercizio vale 5 punti. Consegnare SOLO la bella copia.

1. Sia $f : G \longrightarrow H$ un omomorfismo di gruppi. Sia $g \in G$ un elemento di ordine m. Dimostrare che l'ordine dell'elemento $f(g) \in H$ divide m.
2. Sia R un anello commutativo e siano $I, J \subset R$ due ideali coprimi (questo vuol dire che $I + J = R$). Supponiamo che $IJ = K^m$ per un ideale $K \subset R$ e un esponente $m \geq 1$. Dimostrare che sia I che J sono m-esime potenze di ideali di R.
3. Sia G un gruppo. Per $x, y \in G$ definiamo xRy se e solo se esiste $g \in G$ con $y = gxg^{-1}$.
   (a) Dimostrare che R è una relazione di equivalenza su G.
   (b) Quante classi di equivalenza ci sono, nel caso del gruppo simmetrico $G = S_3$?
4. Dimostrare che il polinomio $X^2 + 1$ ha infiniti zeri nel corpo $\mathbf{H}$ dei quaternioni.
5. Sia Q il gruppo dei quaternioni $\{\pm 1, \pm i, \pm j \pm k\}$.
   (a) Sia $H \subset Q$ un sottogruppo. Dimostrare che $-1 \notin H$ se e solo se $H = \{1\}$.
   (b) Sia G un gruppo con elemento neutro e. Sia $f : Q \to G$ un omomorfismo. Dimostrare che f è iniettivo se e se solo se $f(-1) \neq e$.
6. Sia A l'anello $\mathbf{Z}[X]/(X^2, 2X)$.
   (a) Dire se A è finito o meno.
   (b) Determinare la cardinalità di A^*.

Soluzioni.

1. Questo è l'esercizio 9 del foglio 4.
2. Questo è l'esercizio 5 del foglio 14.
3. (b) Le classi di equivalenza sono tre: l'elemento neutro, la classe delle trasposizioni e la classe dei 3-cicli.
4. Siano $x, y, z \in \mathbf{R}$ con $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Sia w il quaternione $xi + yj + zk$. Allora $\overline{w} = -w$ e quindi $w^2 = -w\overline{w} = -|w|^2 = -(x^2 + y^2 + z^2) = -1$. Ne segue che w è uno zero di $X^2 + 1$. Siccome ci sono infinite triple $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ con $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, il polinomio $X^2 + 1$ ha infiniti zeri in $\mathbf{H}$.
5. (a) Se $H = \{1\}$, sicuramente -1 non sta in H. Viceversa, se $H \neq \{1\}$ e se non contiene -1, allora contiene uno degli elementi $\pm i$, $\pm j$, $\pm k$ e quindi anche il quadrato -1. Per (b) basta applicare la parte (a) al nucleo di f.
6. (a) Ogni elemento di A ha un unico rappresentante in $\mathbf{Z}[X]$ della forma $a + bX$ con $a \in \mathbf{Z}$ e $b \in \{0, 1\}$. L'anello A è quindi infinito. Un elemento $a+bX \in A$ è invertibile se e solo $a = \pm 1$. Infatti, se $a = \pm 1$, allora $(a+bX)(a-bX) = a^2 = 1$ in A. Viceversa, se $(a+bX)(a'+b'X) = 1$ per qualche a', b', allora $aa' = 1$ e quindi $a = \pm 1$. Siccome per b ci sono sempre due scelte, ci sono quattro elementi in A^*, vale a dire 1, -1, $1 + X$ e $-1 + X$.