

Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali*. Ogni esercizio vale 5 punti. Consegnare SOLO la bella copia.

1. Quanti elementi di ordine 6 ci sono nel gruppo simmetrico S_5 ?
2. Sia G un gruppo. Dimostrare:
 - (a) Se G è ciclico, allora $\text{Aut}(G)$ è abeliano.
 - (b) Se $\text{Aut}(G)$ è ciclico, allora G è abeliano.
3. Sia $G = \mathbf{Z}_8 \times \mathbf{Z}_8$ e sia H il sottogruppo generato da $(\bar{4}, \bar{2})$.
 - (a) Calcolare la cardinalità di G/H .
 - (b) Sia a la classe laterale $(\bar{0}, \bar{1}) + H$. Calcolare l'ordine di a in G/H .
4. Quanti omomorfismi di anelli $\mathbf{Z}[X]/(X^2) \rightarrow \mathbf{Z}_8$ ci sono?
5. Scrivere il polinomio $(X^2+1)(Y^2+1)(Z^2+1)$ come polinomio nei polinomi simmetrici elementari s_1, s_2 e $s_3 \in \mathbf{Z}[X, Y, Z]$.
6. Sia A un anello commutativo e siano $I \subset A$ e $J \subset A$ due ideali di A . Dimostrare che $I \cup J$ è un ideale se e soltanto se $I \subset J$ oppure $J \subset I$.

Soluzioni.

1. Un elemento di ordine 6 in S_5 è prodotto di un 3-ciclo e una trasposizione disgiunta. Ci sono $\binom{5}{2} = 10$ trasposizioni. Per ogni scelta ci sono due 3-cicli disgiunti. Si tratta quindi di $2 \cdot 10 = 20$ elementi di ordine 6.
2. (a) Se $G = \mathbf{Z}$, allora $\text{Aut}(G) \cong \mathbf{Z}_2$ e se $G = \mathbf{Z}_n$ per qualche n , allora $\text{Aut}(G) \cong \mathbf{Z}_n^*$. In ogni caso $\text{Aut}(G)$ è abeliano. (b) $G/Z(G)$ è isomorfo ad un sottogruppo di $\text{Aut}(G)$. Se $\text{Aut}(G)$ è ciclico, anche $G/Z(G)$ lo è. Ma allora G è abeliano.
3. Si ha che $H = \{(0, 0), (4, 2), (0, 4), (4, 6)\}$ e quindi $\#G/H = 64/4 = 16$. L'ordine di a è una potenza di 2. Si ha che $a' = a + a = (0, 2) + H$ e $a' + a' = (0, 4) + H = H$. L'ordine di a è quindi 4.
4. Sia $f: \mathbf{Z}[X]/(X^2) \rightarrow \mathbf{Z}_8$ un'omomorfismo di anelli. Allora f è determinato da $f(X)$. Si ha che $f(X)^2 = \bar{0}$ in $\mathbf{Z}_8$. Questo implica che $f(X) = \bar{0}$ oppure $\bar{4}$ in $\mathbf{Z}_8$. Infatti, valutare in $\bar{0}$ e valutare in $\bar{4}$ sono due omomorfismi ben definiti.
5. Questo è l'esercizio 10 del foglio 13.
6. Questo è l'esercizio 9 del foglio 10.