Algebra 1 (Schoof) 3^o appello 15 giugno 2020, ore 10:00–12:00.

Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Ogni esercizio vale 5 punti. Consegnare SOLO la bella copia.

1. Si consideri l'insieme $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Quante sono le possibili relazioni di equivalenza R su A tali che $1R5$, $3R4$ ma no $5R4$? (La notazione aRb vuol dire che $(a, b) \in R$.)
2. Sia G un gruppo. Supponiamo che il centro di G sia banale. Dimostrare che il centro del gruppo degli automorfismi $\mathrm{Aut}(G)$ è banale.
3. Per $n \geq 2$, sia D_n il gruppo diedrale di $2n$ elementi.
   (a) Dimostrare che D_m è un sottogruppo di D_n se m divide n.
   (b) Supponiamo che m divida n. Per quali valori di n e m il sottogruppo D_m è normale in D_n?
4. Sia I l'ideale di $\mathbf{Z}_2[X]$ generato dai polinomi $X^3 + 1$ e $X^2 + 1$. Determinare la cardinalità dell'anello quoziente $\mathbf{Z}_2[X]/I$.
5. Sia $p > 2$ un primo.
   (a) Dimostrare che l'anello $\mathbf{Z}_p[X]/(X^2 - 1)$ è isomorfo a $\mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_p$.
   (b) Dimostrare che l'affermazione della parte (a) è falsa per $p = 2$.
6. Sia k un campo. Un polinomio $f \in k[X]$ si dice irriducibile, se non è costante e se non è prodotto di due polinomi non costanti in $k[X]$. Dimostrare che se f è irriducibile, allora l'anello quoziente $k[X]/(f)$ è un campo.

Soluzioni.

1. Sia c_1 la classe di equivalenza di 1. Allora anche $5 \in c_1$. Sia c_2 la classe di 3. Allora $4 \in c_2$ e $c_1 \cap c_2 = \emptyset$. Per l'elemento 2 ci sono quindi tre possibilità: $2 \in c_1$, $2 \in c_2$ oppure 2 da solo forma una classe di equivalenza c_3. Ci sono quindi tre relazioni di equivalenza.
2. Consideriamo l'omomorfismo $\phi : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(G)$ che manda $g \in G$ nell'automorfismo "coniugio per g". Il nucleo di ϕ è il centro di G ed è banale. Il centro di $\mathrm{Aut}(G)$ è contenuto nel centro di ogni suo sottogruppo. In particulare, $\mathrm{Aut}(G)$ è contenuto nel centro di $\phi(G) \cong G$, il quale è banale.
3. Come solito scriviamo R per la rotazione intorno $(0, 0)$ di angolo $2\pi/n$ e S per la simmetria rispetto l'ascissa. Allora D_n è generato da R e S. Sia m un divisore di n. Poiché $R^{n/m}$ è la rotazione intorno $(0, 0)$ di angolo $2\pi/m$, il gruppo D_m è generato da $R^{n/m}$ e S. È chiaro che D_m è un sottogruppo di D_n. Si tratta di un sottogruppo normale, se e solo se $RSR^{-1} \in D_m$. Poiché $RSR^{-1} = R^2S$, questo succede se e solo se n/m divide 2. In altre parole, se e solo se $m = n$ oppure $m = n/2$.
4. Nell'anello $\mathbf{Z}_2[X]$ abbiamo che $X^3 + 1 = (X + 1)(X^2 + X + 1)$ e $X^2 + 1 = (X + 1)^2$. L'ideale generato da $X^3 + 1$ e $X^2 + 1$ è generato dal loro mcd $X + 1$. La cardinalità di $\mathbf{Z}_2[X]/(X + 1)$ è 2.
5. Questo è l'esercizio 2 del foglio 11.
6. Questo è l'esercizio 5 del foglio 11.