1. *Gruppi delle classi.*.
   (a) Dimostrare che il gruppo delle classi di $\mathbf{Q}(\sqrt{-86})$ è ciclico di cardinalità 10.
   (b) Scrivere i gruppi delle classi di $\mathbf{Q}(\sqrt{-30})$ e di $\mathbf{Q}(\sqrt{-114})$ come prodotti di gruppi ciclici.
   (c) Quanti elementi ha il gruppo delle classi di $F = \mathbf{Q}(\sqrt{229})$?

2. Sia α uno zero del polinomio irriducibile $T^3 + T - 1 \in \mathbf{Q}[T]$ e sia $F = \mathbf{Q}(\alpha)$.
   (a) Dimostrare che l'anello degli interi di F è $\mathbf{Z}[\alpha]$.
   (b) Fattorizzare i numeri primi $p < 12$ come prodotto di ideali primi di $\mathbf{Z}[\alpha]$.
   (c) Dimostrare che il gruppo delle classi di $\mathbf{Q}(\alpha)$ è banale.

3. Dimostrare la disuguaglianza tra media aritmetica e geometrica: siano $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{R}_{\geq 0}$; allora si ha che
$$(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n)^{1/n} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}.$$

4. Sia d un intero senza fattori quadratici e sia $F = \mathbf{Q}(\sqrt{d})$ e sia O_F l'anello degli interi di F. Sia $p > 2$ un numero primo. Dimostrare che p è prodotto di due ideali primi di O_F se e solo se Dimostrare che p rimane pirmo in O_F se e solo se d non è un quadrato in $\mathbf{Z}_p$.

5. Sia ζ_5 una radici quinta dell'unità primitiva.
   (a) Dimostrare che $\mathbf{Z}[\zeta_5]$ è l'anello degli interi di $\mathbf{Q}(\zeta_5)$.
   (b) Per i numeri primi $p < 14$, dire quanti fattori primi di $\mathbf{Z}[\zeta_5]$ dividono p.

6. Sia $F = \mathbf{Q}(\sqrt{59})$. Dimostrare che il gruppo delle classi di F è banale. Esibire un elemento invertibile di O_F diverso da ± 1.

7. Sia $F = \mathbf{Q}(\sqrt[3]{6})$. Dimostrare che il gruppo delle classi di F è banale. Esibire un elemento invertibile di O_F diverso da ± 1.

8. Sia p un numero primo.
   (a) Dimostrare che l'intersezione degli insiemi
$$\{-a^2 : a \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}\}, \qquad \text{and} \qquad \{b^2 + 1 : b \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}\}$$
   non è vuoto e quindi esistono $a, b \in \mathbf{Z}$ con $-a^2 \equiv b^2 + 1 \pmod{p}$.
   (b) Dimostrare che il reticolo
$$L = \{(x, y, z, w) \in \mathbf{Z}^4 : z = ax + by \pmod{p} \text{ and } w = bx - ay \pmod{p}\}$$
   ha covolume p^2 in $\mathbf{R}^4$.
   (c) Dimostrare che ogni vettore (x, y, z, w) in L soddisfa $x^2+y^2+z^2+w^2 \equiv 0 \pmod{p}$.
   (d) Dimostrare che la palla B di raggio $\sqrt{2p}$ in $\mathbf{R}^4$ ha volume $\frac{\pi^2}{2}(\sqrt{2p})^4$.
   (e) Dedurre da (b), (c) e (d) che p è somma di quattro quadrati.