1. Sia $F = \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{-6})$.
   (a) Calcolare il grado di F su $\mathbf{Q}$.
   (b) Determinare una base di F come $\mathbf{Q}$-spazio vettoriale.
   (c) Determinare un elemento $\alpha \in F$ tale che $F = \mathbf{Q}(\alpha)$.
   (d) Dimostrare che $\sqrt{-3} \in F$.
   (e) Determinare il discriminante $\Delta(1, \sqrt{2}, \sqrt{-3}, \sqrt{-6})$.
   (f) Determinare il discriminante $\Delta(1, \sqrt{2}, \sqrt{-3}, \sqrt{2} + \sqrt{-3})$.

2. Sia F un campo di numeri e sia $\phi : F \longrightarrow \mathbf{C}$ un'omomorfismo di campi. Dimostrare che $\phi(q) = q$ per ogni $q \in \mathbf{Q}$.

3. Sia F un campo di numeri di grado n.
   (a) Sia $x \in F$. Dimostrare che per ogni $q \in \mathbf{Q}$ si ha che
   $$Tr(qx) = qTr(x), \qquad Tr(q) = nq, \qquad N(q) = q^n.$$
   (b) Dimostrare che l'omomorfismo $Tr : F \longrightarrow \mathbf{Q}$ è suriettiva. Dimostrare che, in generale, la norma $N : F^* \longrightarrow \mathbf{Q}^*$ non è suriettiva.

4. (*VanderMonde)* Sia R un anello commutativo con 1 e siano $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in R$. Dimostrare l'uguaglianza
$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (\alpha_j - \alpha_i).$$

5. Sia $d \in \mathbf{Z}$ senza fattori quadratici
   (a) Se $d \not\equiv 1 \pmod 4$, dimostrare che l'anello degli interi del campo $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ è uguale a $\mathbf{Z}[\sqrt{d}] = \{u + v\sqrt{d} : u, v \in \mathbf{Z}\}$..
   (b) Se $d \equiv 1 \pmod 4$ dimostrare che l'anello degli interi di $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ è uguale a
   $$\{u + v\sqrt{d} : u, v \in \mathbf{Z} \text{ oppure } u, v \in \tfrac{1}{2} + \mathbf{Z}\}.$$
   Verificare che si tratta dell'anello $\mathbf{Z}[\frac{1+\sqrt{d}}{2}]$.

6. Sia F un campo di numeri di grado n, sia $a \in F$ e sia $f \in \mathbf{Q}[X]$ il polinomio caratteristico di a. Dimostrare che per ogni $q \in \mathbf{Q}$, la norma di $q - a$ è uguale a $f(q)$. Dimostrare che per ogni $q, r \in \mathbf{Q}^*$, la norma di $q - ra$ è data da $r^n f = (q/r)$.

7. Sia F un campo di numeri.
   (a) Dimostrare che il campo delle frazioni dell'anello degli interi O_F è uguale a F.
   (b) Sia $F \subset K$ un'estensione di campi di grado finito. Dimostare che $O_K \cap F = O_F$.

8. Sia $f(X) = X^4 - X - 1$.
   (a) Dimostrare che f è irriducibile in $\mathbf{Q}[X]$.
   Sia $F = \mathbf{Q}[X]/(f(X))$. Scriviamo $F = \mathbf{Q}(\alpha)$ dove α è uno zero di f.
   (b) Calcolare il discriminante $\Delta(1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3)$.
   (c) Dimostrare che l'anello degli interi di F è $\mathbf{Z}[\alpha]$.