1. Determinare il grado del campo di spezzamento dei seguenti polinomi su $\mathbf{Q}$:
   (a) $X^3 - 1$;
   (b) $X^3 - 3$;
   (c) $X^4 - 2$;
   (d) $X^{10} - 1$;
   (e) $X^2 - 841$;
   (f) $X^3 - X^2 - 2X + 1$, (Sugg. $\alpha = 2\cos(\pi/7)$ è uno zero del polinomio.)

2. Determinare il grado del campo di spezzamento del polinomio $X^4 - 2$ sui campi
   (a) $\mathbf{C}$,
   (b) $\mathbf{R}$,
   (c) $\mathbf{Q}$,
   (d) $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$,
   (e) $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})$,
   (f) $\mathbf{Q}(\sqrt[4]{2})$.
   (g) $\mathbf{Z}_2$,
   (h) $\mathbf{Z}_3$,
   (i) $\mathbf{Z}_5$.

3. Sia R un anello commutativo. Il *derivato* f' di un polinomio $f = a_nX^n + \ldots + a_2X^2 + a_1X + a_0 \in R[X]$ è definito da
$$f' = na_nX^n + \ldots + 2a_2X + a_1.$$
   Dimostrare
$$\begin{aligned} (f+g)' &= f' + g', && \text{per ogni } f, g \in R[X];\\ (fg)' &= fg' + f'g, && \text{per ogni } f, g \in R[X];\\ f' &= 0, && \text{per ogni } f \text{ costante.} \end{aligned}$$

4. Sia R un anello commutativo, sia $f \in R[X]$ e sia $\alpha \in R$ uno zero di f. Dimostrare che $(X - \alpha)^2$ divide f se e solo se $f'(\alpha) = 0$. In altre parole, lo zero α è uno zero *doppio* se e solo se $f'(\alpha) = 0$.

5. Sia k un campo e sia $f \in k[X]$ un polinomio.
   (a) Supponiamo che $\mathrm{car}(k) = 0$. Dimostrare che $f' = 0$ se e solo se f è costante.
   (b) Supponiamo che $\mathrm{car}(k) = p$ sia primo. Dimostrare che $f' = 0$ se e solo se $f(X) = g(X^p)$ per qualche polinomio $g \in k[X]$.

6. Sia k un campo e sia $f \in k[X]$ un polinomio di grado n. Dimostrare che il grado del campo di spezzamento di f su k divide $n!$.

7. Sia p un primo e sia k un campo di caratteristica p. Sia $a \in k$ e sia f il polinomio "di Artin-Schreier" $X^p - X - a \in k[X]$. Dimostrare le seguenti affermazioni
   (a) per ogni $\lambda \in \mathbf{Z}_p$ si ha che $f(X + \lambda) = f(X)$.
   (b) per $\lambda \in \mathbf{Z}_p$ e $\alpha \in \overline{k}$ uno zero di f anche $\alpha + \lambda$ è uno zero di f.
   (c) Se f ha uno zero in k, allora f è prodotto di fattori lineari in $k[X]$.
   (d) Se f non ha zeri in k, allora f è irriducibile e il suo campo di spezzamento ha grado p su k. (Sugg. Per un fattore irriducibile g di f considerare il *gruppo additivo* $H = \{\lambda \in \mathbf{Z}_p : g(X + \lambda) = g(X)\}$).

8. Sia p un numero primo. Per $a \in \mathbf{Z}_p$ sia g_a il polinomio $X^p - X - a$.
   (a) Dimostrare che il polinomio $X^p - X + a$ è irriducibile in $\mathbf{Z}_p[X]$ quando $a \neq 0$.
   (b) Dimostrare che $g_1 = X^p - X + 1$ divide il polinomio $X^{p^p - 1} - 1$
   (c) Dimostrare che il prodotto dei polinomi g_a è uguale a $X^{p^2} - 2X^p + X$.