1. Sia G un gruppo. Un sottogruppo H di G si dice *caratteristico* se $\sigma(H) = H$ per ogni $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$. Dimostrare che il centro $Z(G)$ e il sottogruppo dei commutatori G' sono sottogruppi caratteristici di G.

2. Siano $N \subset H \subset G$ sottogruppi.
   (a) Dimostrare che se H è normale in G ed N è un sottogruppo caratteristico di H, allora N è un sottogruppo normale di G.
   (b) Esibire un esempio dove N è normale in H ed H è normale in G, ma N *non* è normale in G. (Sugg. prendere $G = D_4$)

3. Sia G un gruppo e sia $f : G \longrightarrow G$ la biiezione data da $f(x) = x^{-1}$ per $x \in G$. Dimostrare che G è abeliano se e solo se f è un automorfismo di G.

4. Sia G un gruppo finito, sia p un divisore primo di $\#G$ e sia $P \subset G$ un suo p-sottogruppo di Sylow.
   (a) Il gruppo P agisce sull'insieme delle sue classi laterali sinistre per moltiplicazione. Dimostrare che il numero di punti fissi non è congruo a 0 (mod p).
   (b) Se $\#P = p$ e p è il più piccolo divisore primo di $\#G$, dimostrare che il centralizzante di P è uguale al normalizzante di P.

5. (L'omomorfismo transfer) Sia G un gruppo finito e sia $H \subset G$ un sottogruppo di G. Siano x_iH, $(i \in I)$ le classi laterali sinistre di H.
   (a) Sia $g \in G$. Dimostrare che per ogni $i \in I$ esistono unici $j \in I$ e $h_i \in H$ tali che $gx_i = x_jh_i$.
   (b) Sia $g \in G$ come nella parte (a). Dimostrare che il prodotto $\prod_{i\in I} h_i$ è un elemento ben definito di $H/[H, H]$ che dipende solo da g e non dalla scelta dei rappresentanti x_i.
   (c) Dimostrare che la mappa $G \longrightarrow H/[H, H]$, che manda g in $\prod_{i\in I} h_i$ è un omomorfismo ben definito.

6.*Sia G un gruppo finito. Supponiamo che $\#G = pm$ dove p è il più piccolo divisore primo di $\#G$ ed m non è divisibile per p. Dimostrare che G ammette un sottogruppo normale di indice p.
(Sugg: sia P un p-sottogruppo di Sylow di G; allora P agisce su G tramite moltiplicazione a sinistra; scegliere rappresentanti x_i in modo che $\{x_i : i \in I\}$ sia unione di P-orbite; dimostrare che il transfer $G \longrightarrow P$ non è banale e quindi suriettivo.)

7. Sia $n \geq 1$ e sia φ la funzione di Eulero.
   (a) Per $n = 77, 91$ e 345 verificare che $\mathrm{mcd}(n, \varphi(n)) = 1$ e dimostrare che ogni gruppo di ordine n è ciclico.
   (b) Provare che se $\mathrm{mcd}(n, \varphi(n)) \neq 1$, allora esiste un gruppo G di ordine n non ciclico.
   (c) Se $\mathrm{mcd}(n, \varphi(n)) = 1$ allora si ha che $\mathrm{mcd}(m, \varphi(m)) = 1$ per ogni divisore m di n.
   (d)*Dimostrare il viceversa di (b). (Sugg: per induzione si può supporre che G è semplice. Considerare centralizzanti di elementi $x \in G$.
   Google: "gcd(n,phi(n))=1.pdf").