Algebra 2 (Schoof) 2^o esonero 25 gennaio 2018, ore 14:00–16:00.

COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Sia $K \subset L$ un'estensione di campi di grado $[L : K]$ dispari. Sia $\alpha \in L$. Dimostrare che $K(\alpha) = K(\alpha^2)$.
2. Sia $f : A \longrightarrow B$ un omomorfismo di anelli commutativi. Dimostrare che la mappa $f^* : \mathrm{Spec}(B) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ data da $f^*(\mathfrak{p}) = f^{-1}(\mathfrak{p})$ è continua per la topologia di Zariski.
3. Sia $g = X^4 - 2$. Decidere se g è irriducibile come elemento di $\mathbf{Z}[X]$, di $\mathbf{Q}[X]$ e di $\mathbf{Z}_3[X]$ rispettivamente (ci vogliono tre risposte).
4. Scrivere il gruppo moltiplicativo $(\mathbf{F}_7[X]/(X^3 - 1))^*$ come prodotto di gruppi ciclici.
5. Sia p un primo e sia $k = \mathbf{F}_{p^8}$. Per quanti elementi $\alpha \in k$ si ha che $k = \mathbf{F}_p(\alpha)$?
6. Sia $f(X) = X^3 - 3X - 1 \in \mathbf{Q}[X]$.
   (a) Dimostrare che f è irriducibile in $\mathbf{Q}[X]$.
   (b) Dimostrare: se α è uno zero di f, anche $-\frac{1}{\alpha+1}$ lo è.
   (c) Determinare il grado su $\mathbf{Q}$ di un campo di spezzamento di f.

Soluzioni.

1. Questo è l'esercizio 9 del foglio 8.
2. Questo è l'esercizio 8 del foglio 6.
3. Per il criterio di Eisenstein il polinomio $X^4 - 2$ è irriducibile in $\mathbf{Z}[X]$ e quindi, per il Lemma di Gauss è irriducibile anche in $\mathbf{Q}[X]$. Per $\mathbf{F}_3[X]$, osserviamo che gli zeri di $X^4 - 2 = X^4 + 1$ sono le radici primitive ottave dell'unità. Poichè 8 divide $\#\mathbf{F}_9^*$, il campo di spezzamento è $\mathbf{F}_9$. Ne segue che $X^4 - 2$ è riducibile. Infatti si ha che $X^4 - 2 = (X^2 + X - 1)(X^2 - X - 1)$ in $\mathbf{F}_3[X]$.
4. Per il Teorema cinese del resto, $\mathbf{F}_7[X]/(X^3 - 1)$ è isomorfo a $\mathbf{F}_7[X]/(X - 1) \times \mathbf{F}_7[X]/(X - 2) \times \mathbf{F}_7[X]/(X - 4) \cong \mathbf{F}_7 \times \mathbf{F}_7 \times \mathbf{F}_7$,. Ne segue che $(\mathbf{F}_7[X]/(X^3 - 1))^*$ è isomorfo a $\mathbf{Z}_6 \times \mathbf{Z}_6 \times \mathbf{Z}_6$.
5. Se $\mathbf{F}_p(\alpha) \neq k$, allora α appartiene ad un sottocampo proprio di k. I sottocampi sono linearmente ordinati. Il sottocampo proprio più grande è $\mathbf{F}_{p^4}$. Ci sono quindi $p^8 - p^4$ elementi α con $k = \mathbf{F}_p(\alpha)$.
6. (a) Il polinomio f è irriducibile modulo 2 e quindi in $\mathbf{Z}[X]$ e $\mathbf{Q}[X]$. Un calcolo diretto fa vedere che f si annulla in $-\frac{1}{\alpha+1}$. Per la parte (c) si osserva che $-\frac{1}{\alpha+1}$ è uno zero di f diverso da α. Il campo $\mathbf{Q}(\alpha)$ contiene dunque due zeri e quindi tutti gli zeri di f. Ne segue che il campo $\mathbf{Q}(\alpha)$ è un campo di spezzamento di f su $\mathbf{Q}$. Il grado su $\mathbf{Q}$ è 3.