1. Sia G un gruppo. Un sottogruppo H di G si dice *caratteristico* se $\sigma(H) = H$ per ogni automorfismo $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$. Dimostrare:
   (a) i sottogruppi $Z(G)$ e $[G, G]$ sono caratteristici;
   (b) un sottogruppo caratteristico di G è normale in G;
   (c) se $H \subset N \subset G$ sono sottogruppi tali che H è caratteristico in N e N è normale in G, allora H è un sottogruppo normale di G;
   (d) dimostrare che l'affermazione della parte (c) non è vera in generale se H è soltanto un sottogruppo normale di N.
2. Per $F = \mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ e $\mathbf{C}$ scriviamo F^{*2} per l'insieme $\{x^2 : x \in F^*\}$ dei quadrati di F.
   (a) Dimostrare che F^{*2} è un sottogruppo del gruppo moltiplicativo F^*.
   (b) Dimostrare che il quoziente $\mathbf{R}^*/\mathbf{R}^{*2}$ è isomorfo a $\mathbf{Z}_2$. Dimostrare che $\mathbf{C}^*/\mathbf{C}^{*2}$ è il gruppo banale.
   (c) Dimostrare che $\mathbf{Q}^*/\mathbf{Q}^{*2}$ è un gruppo infinito.
3. Dimostrare che per nessun $n \geq 3$ i gruppi S_n e $A_n \times \mathbf{Z}_2$ sono isomorfi.
4. Siano $n, m \geq 1$ a sia $f : S_n \longrightarrow S_m$ un omomorfismo. Dimostrare che $f(A_n) \subset A_m$.
5. Determinare tutti gli omomorfismi
   (a) $\mathbf{Z}_6 \longrightarrow \mathbf{Z}_4$; (c) $\mathbf{Z}_6 \longrightarrow S_3$; (e) $\mathbf{Z}_8 \longrightarrow D_4$;
   (b) $S_3 \longrightarrow D_4$; (d) $D_4 \longrightarrow \mathbf{Z}_8$; (f) $V_4 \longrightarrow V_4$.
6. (a) Ecco il famoso puzzle di *Sam Loyd* (statunitense noto per i suoi rompicapo, 1841–1911). Ci sono 15 blocchetti, numerati da 1 a 15, in un telaio. Utilizzando l'unica posizione vuota, essi si possono spostare orizzontalmente o verticalmente. Lo scopo del gioco è di ordinare i blocchetti da 1 a 15 per righe. Far vedere che questo è *impossibile* a partire dalla configurazione rappresentata a destra.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

   (b) Lo stesso gioco come in (a). È incredibile, ma nonostante le affermazioni della parte (a) di questo esercizio, in Trentino sanno ordinare i blocchetti cominciando dalla configurazione rappresentata a destra. Come mai?

33	tren	tini	an
da	va	no	per
Trento	tut	ti	33
trot	do	tan	

   (*http://en.wikipedia.org/wiki/15_puzzle*)
7. Sia n un numero naturale che soddisfa $\mathrm{mcd}(n, 10) = 1$. Dimostrare che la lunghezza del periodo dell'espansione decimale della frazione $1/n$ è uguale all'ordine di $\overline{10}$ nel gruppo $\mathbf{Z}_n^*$.