1. Sia G un gruppo e sia $H \subset G$ un sottogruppo che contiene il sottogruppo $[G,G]$ dei commutatori. Dimostrare che H è un sottogruppo normale e che G/H è un gruppo abeliano.

2. Sia $G = \mathbf{Z}_{33}^*$ e sia H il sottogruppo generato da $\overline{4}$. Stabilire se il gruppo quoziente G/H è ciclico o meno.

3. Sia $f : \mathbf{Z}_{39}^* \longrightarrow \mathbf{Z}_{39}^*$ l'applicazione data da $f(x) = x^6$ per $x \in \mathbf{Z}_{39}^*$.
   (a) Dimostrare che f è un omomorfismo di gruppi e che $\mathrm{im}(f) \subset \ker(f)$.
   (b) Quanti elementi ha il gruppo quoziente $\ker(f)/\mathrm{im}(f)$?

4. Stabilire se il gruppo alternante A_4 è isomorfo o meno al gruppo diedrale D_6. Spiegare la risposta.

5. Dimostrare che il gruppo simmetrico S_5 contiene un elemento di ordine 6. Esibire $n > 1$ tale che il gruppo simmetrico S_n contiene un elemento di ordine almeno n^2.

6. Sia G un gruppo finito con la proprietà che $\mathrm{Aut}(G)$ è banale.
   (a) Dimostrare che G è abeliano;
   (b) Dimostrare che ogni elemento di G ha ordine ≤ 2;
   (c) Dimostrare che $\#G = 1$ oppure 2.

7. Dimostrare che ogni numero naturale n con $\mathrm{mcd}(n, 10) = 1$ divide un numero della forma $11111\ldots11111$ (per esempio, 37 divide 111; sugg: prima dimostrare che n divide un numero della forma $9999\ldots9999$).

8. Scrivere il polinomio $(X^2+1)(Y^2+1)(Z^2+1)$ come polinomio nei polinomi simmetrici elementari $s_1, s_2, s_3 \in \mathbf{Z}[X, Y, Z]$.

9. Sia R un anello commutativo. Un elemento $e \in R$ si dice *idempotente* se $e^2 = e$.
   (a) Determinare gli elementi idempotenti degli anelli $\mathbf{Z}_6$ e di $\mathbf{Z}_9$.
   (b) Sia k un campo e sia $n \geq 1$. Determinare gli elementi idempotenti dell'anello k^n.
   (c) Dimostrare che se $e \in R$ è idempotente, anche $1 - e$ è idempotente.
   (d) Dimostrare che l'insieme E degli elementi idempotenti di R formano un gruppo con l'operazione $e * f = (e - f)^2$ per $e, f \in E$.

10. Un elemento x di un anello R si dice *nilpotente* se $x^n = 0$ per un $n \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$.
    (a) Determinare gli elementi nilpotenti degli anelli $\mathbf{Z}_6$ e $\mathbf{Z}_{24}$.
    (b) Dimostrare che gli elementi nilpotenti di un anello commutativo R formano un ideale.

11. Sia $n > 1$ un intero senza fattori quadrati.
    (a) Dimostrare che ogni gruppo abeliano di cardinalità n è ciclico. (Sugg: sia $x \in G$ diverso dall'elemento neutro. Se x non ha ordine n, allora considerare il sottogruppo $H = \langle x \rangle$ e il quoziente G/H e procedere per induzione)
    (b) Dimostrare che ogni anello (commutativo con 1) di cardinalità n è isomorfo all'anello $\mathbf{Z}_n$.