Algebra 2. 9. Moduli su PID, forma di Jordan. Roma, 10 dicembre 2015

1. Sia $p > 2$ un numero primo. Per $x \in \mathbf{Z}$ indichiamo con $v_p(x)$ il più grande esponente e tale che p^e divide x.
   (a) Sia $a \in \mathbf{Z}$ divisibile per p. Dimostrare che $v_p((1+a)^p - 1) = v_p(a) + 1$.
   (b) Sia $a \in \mathbf{Z}$ divisibile per p. Dimostrare che per ogni intero $k \geq 1$ si ha che $v_p((1+a)^{p^k} - 1) = v_p(a) + k$.
   (c) Sia $n \geq 1$. Dimostrare che l'elemento $\overline{1+p}$ di $\mathbf{Z}_{p^n}^*$ ha ordine p^{n-1}.
   (d) Dimostrare che il gruppo $\mathbf{Z}_{p^n}^*$ è ciclico.

2. Let $m \geq 2$.
   (a) Dimostrare che l'elemento $\overline{5}$ di $\mathbf{Z}_{2^m}^*$ ha ordine 2^{m-2}.
   (b) Dimostrare che $\mathbf{Z}_{2^m}^*$ è isomorfo al prodotto di $\{\pm 1\}$ per il sottogruppo generato da $\overline{5}$.

3. Scrivere i gruppi $\mathbf{Z}_{120}^*$ e $\mathbf{Z}_{10!}^*$ come prodotto di gruppi del tipo $\mathbf{Z}_n$.

4. Per gli anelli finiti $R = \mathbf{Z}_{91}$, $\mathbf{Z}_{100}$, $\mathbf{Z}[i]/(9-2i)$ e $\mathbf{Z}_3[X]/(X^4-1)$, scrivere il gruppo moltiplicativo R^* come prodotto di gruppi ciclici.

5. Sia k un campo. Per i seguenti $k[X]$-moduli, determinare una matrice rappresentativa per la moltiplicazione per X:
   (a) $k[X]/(X^4)$;
   (b) $k[X]/(X^2) \times k[X]/(X^2)$;
   (c) $k[X]/(X) \times k[X]/(X+1) \times k[X]/(X+2) \times k[X]/(X+3)$.

6. Scrivere la matrice
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 9 & 2 & -10 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$
nella forma normale di Jordan.

7. Determinare la forma normale di Jordan della tavola pitagorica
$$\begin{pmatrix}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\
2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 & 18 & 20 \\
3 & 6 & 8 & 12 & 15 & 18 & 21 & 24 & 27 & 30 \\
4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 24 & 28 & 32 & 36 & 40 \\
5 & 10 & 15 & 20 & 25 & 30 & 35 & 40 & 45 & 50 \\
6 & 12 & 18 & 24 & 30 & 36 & 42 & 48 & 54 & 60 \\
7 & 14 & 21 & 28 & 35 & 42 & 49 & 56 & 63 & 70 \\
8 & 16 & 24 & 32 & 40 & 48 & 56 & 64 & 72 & 80 \\
9 & 18 & 27 & 36 & 45 & 54 & 63 & 72 & 81 & 90 \\
10 & 20 & 30 & 40 & 50 & 60 & 70 & 80 & 90 & 100
\end{pmatrix}.$$