1. Dire se i seguenti ideali degli anelli $\mathbf{Z}[X]$, $\mathbf{Q}[X]$ e $\mathbf{Z}_3[X]$ sono primi o meno:
$$(X^3 - 18X + 12), \qquad (X^3 - 18X + 12, 5), \qquad (X^3 - 18X + 12, X - 1).$$
(Sono richieste quindi $3 \times 3 = 9$ risposte ....)

2. Sia $R = \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R} : f \text{ è continua}\}$.
   (a) Dimostrare che R è un anello (con $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ e $(f\cdot g)(x) = f(x)g(x)$.)
   (b) Per ogni $x \in [0,1]$ sia $M_x = \{f \in R : f(x) = 0\}$. Dimostrare che M_x è un ideale massimale di R.
   (c) Dimostrare che ogni ideale massimale di R è uguale a M_x, per un certo $x \in [0,1]$. (Sugg. Usare la compattezza dell'intervallo chiuso $[0,1]$.)

3. Sia R un anello.
   (a) Dimostrare che gli elementi nilpotenti di R formano un ideale N di R.
   (b) Dimostrare che $N \subset \bigcap_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}$ dove $\mathfrak{p}$ varia fra gli ideali primi di R. Nel prossimo esercizio dimostriamo l'inclusione opposta.

4. Siano R e N come sopra e sia $x \in R - N$. Sia Ω l'insieme degli ideali I di R che hanno la proprietà che $x^n \notin I$ per nessun $n \geq 1$.
   (a) Dimostrare che $\Omega \neq \emptyset$.
   (b) Dimostrare che ogni catena in Ω ha un estremo superiore in Ω (l'ordinamento di Ω è dato dall'inclusione).
   (c) Per il Lemma di Zorn esiste un elemento massimale $M \in \Omega$. Dimostrare che M è un ideale primo di R.
   (d) Dimostrare che $\bigcap_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p} \subset N$

5. Sia $f : A \longrightarrow B$ un omomorfismo di anelli commutativi. Dimostrare che la mappa $f^* : \mathrm{Spec}(B) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ data da $f^*(\mathfrak{p}) = f^{-1}(\mathfrak{p})$ è continua per la topologia di Zariski.

6. Dimostrare che per ogni anello R lo spazio $\mathrm{Spec}(R)$, dotato dalla topologia di Zariski, è compatto.

7. Sia R un dominio. Dimostrare che l'ideale $\{0\}$ è primo. Dimostrare che $\{0\}$ è un punto denso di $\mathrm{Spec}(R)$, nel senso che ogni aperto non vuoto contiene il punto $\{0\}$.

8. Siano A, B due anelli. Siano $p : A \times B \longrightarrow A$ e $q : A \times B \longrightarrow B$ le due proiezioni, e siano $p^* : \mathrm{Spec}(A) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A \times B)$ e $q^* : \mathrm{Spec}(B) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A \times B)$ le due applicazioni indotte (quelle dell'Eserc. 12.).
   (a) Dimostrare che l'applicazione
   $$\mathrm{Spec}(A) \cup \mathrm{Spec}(B) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A \times B)$$
   indotta da p e q, è un omeomorfismo.
   (b) Dimostrare che se A e B sono diversi dell'anello zero, allora $\mathrm{Spec}(A \times B)$ è sconnesso.